This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

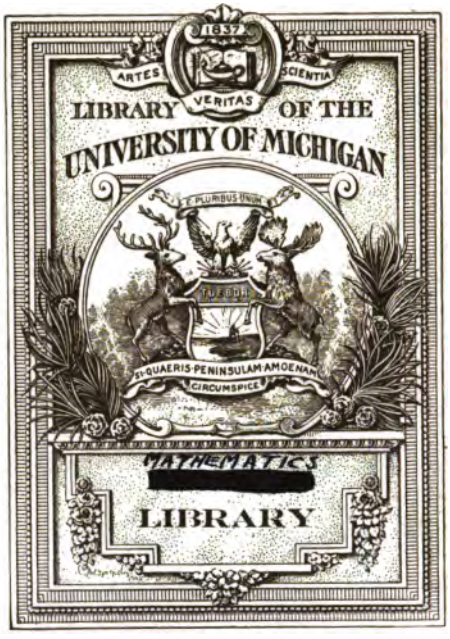
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
MRS. JOHN OREN REED

Mathematics
QC
32
.K12
1874

MATHEMATISCHE

AUFGABEN AUS DER PHYSIK

NEBST AUFLÖSUNGEN.

ZUM GEBRAUCHE AN HÖHEREN LEHRANSTALTEN

UND

ZUM SELBSTUNTERRICHTE

BEARBEITET

VON

Dr. Phil. EMIL KAHL.

ZWEITE, GÄNZLICH UMGEARBEITETE, VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE, MIT ALLSEITIGER BERÜCKSICHTIGUNG DES METRISCHEN MASSSYSTEMS.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1874.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Math. Lit
Gift
Mrs. J. O. Reed
4-12-33

Vorrede zur zweiten Auflage.

Ebenso wie bei der ersten Bearbeitung meiner mathematischen Aufgaben aus der Physik, habe ich bei deren jetzt erfolgten gänzlichen Umarbeitung die Absicht im Auge behalten, auch einem grösseren Kreise von Studirenden dieser Wissenschaft, namentlich jungen Technikern Gelegenheit zu wiederholter Beschäftigung mit deren Hauptsätzen und damit Anregung zu innigerem Verständniss derselben zu geben. Ich habe mich bei der soeben vollendeten neuen Bearbeitung noch grösserer Vollständigkeit befleissigt, indem ich die Aufgaben auf weitere und neuere Gebiete der Physik und auf die Werkzeuge und Probleme der experimentellen und beobachtenden Physik ausdehnte. Als Beleg hierzu können unter anderen die Aufgaben dienen:

Ueber die noch wenig berücksichtigte Theorie der Wage mit elastischer Biegung des Balkens (Hartig, polytechnisches Centralblatt, 25. Jahrg., S. 1041);

über Fehler und Correctionen bei Bestimmung specifischer Gewichte;

über die Theorie der Beobachtung mit Spiegel und Scala;

über Längen- und Seitenabweichung, Hauptbrennweiten und Cardinalpunkte von Linsen, Achromasie;

über Wärmelehre etc.

Ausser durch allseitige consequente Durchführung des metrischen Masssystems ist für die allgemeine Benutzung der gegenwärtig dargebotenen Aufgaben durch deren Abfassung insofern gesorgt worden, als nur die schwierigeren derselben mathematische Vorkenntnisse erfordern, welche in der Algebra bis zu den Gleichungen dritten Grades sich erstrecken, ein wenig Uebung im Rechnen mit kleinen Grössen erfordern und in Geometrie, Trigonometrie und den Anfängen der analytischen Geometrie über die Ebene hinaus gehen. Die numerischen

Rechnungen können mit sehr geringen, durch die Natur der Aufgaben gebotenen Ausnahmen, durch fünfstellige Logarithmen erledigt werden.

Im Interesse der Benutzung meiner Aufgaben von den Herren Professoren und Lehrern bei der Auswahl von Vorlesungsbeispielen, resp. Schulaufgaben habe ich die numerischen Beispiele der Aufgaben möglichst vermehrt und dadurch die Zahl derselben auf gegen 3000 gebracht; eine weitere Vermehrung würde nur bei Erweiterung des Umfanges vom Buche möglich gewesen sein.

Die bei der ersten Auflage erfolgte Zusammenstellung der Auflösungen in einen zweiten, für sich verkäuflichen Theil ist diesmal unterblieben, da der Absatz von Aufgaben und Auflösungen bei der ersten Auflage in gleichen Exemplaren erfolgt ist, sonach Trennung des Buches in zwei Theile nicht nöthig ist und nur zu unnöthigen Kosten führen würde; dagegen sind aber die Auflösungen für sich unter einem besonderen Titel Seite 177 bis 311 (Bogen 12 bis 20) als zweite Hälfte des Buches zusammengefasst worden. Die übrige Einrichtung des Buches legt von meinem Wunsche Zeugniss ab, trotz der bedeutenden Vermehrung des Materials eine unbequeme und kostspielige Umfänglichkeit zu vermeiden. Die in diesem Sinne zu erzielende Raumersparniss veranlasste mich, überall das nicht unbedingt Erforderliche wegzulassen, die möglichste Kürze im Ausdruck anzuwenden, die Beispiele gruppenweise zusammenzustellen und die Verzeichnisse der Aufgaben und Auflösungen mit den Zeichenerklärungen und den nach der Superrevision noch gebotenen Bemerkungen der Kürze wegen in Eins zusammenzufassen.

Für die Sorgfalt bei der Auswahl des Papieres und Ausführung des Druckes sage ich der geehrten Verlagshandlung noch ganz besonders meinen Dank.

Dresden, am 11. September 1874.

Dr. phil. **Emil Kahl.**

Verzeichniss

der Aufgaben und Auflösungen

nebst

allgemeinen und speciellen Anmerkungen im Interesse deren Benutzung.

Bezeichnungen von Massen und Gewichten.

Meter = m,	Decimeter = dcm,
Centimeter = cm,	Millimeter = mm.
Quadratmeter = □m = qm,	Quadratdecimeter = □dcm = qdcm,
Quadratcentimeter = □cm = qcm,	Quadratmillimeter = □mm = qmm.
Cubikmeter = cbm,	Cubikdecimeter = cbdcm,
Cubikcentimeter = cbcm,	Cubikmillimeter = cbmm.
Liter (= 1 cbdcm) = li,	Hektoliter (= 100 cbdcm) = hli.
Kilogramm = kg,	Dekagramm = dkg,
Gramm = g,	Decigramm = dcg.
Centigramm = cg.	Milligramm = mg.

Kilogrammmeter = kgm.

Die neben der Nummer einer Aufgabe oder Auflösung in Parenthese gestellte kleine Zahl bedeutet die Bezeichnung derselben in der ersten Auflage.

Die Angabe der Anzahl von Beispielen einer Art ist im Verzeichniss in runder Zahl erfolgt.

Erste Abtheilung. Mechanische Naturlehre.

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Nr. 1—6. Kräfte, welche in gleicher und gerade entgegengesetzter Richtung an einem Punkte wirken; 35 Beispiele	1	179
Nr. 7—17. Zwei unter einem rechten Winkel an einem Punkte angreifende Kräfte; 95 Beispiele . . .	3	180
Auflösung 11 Beispiel 10 bezieht sich auf das Kräfteverhältniss $\frac{185}{672}$	4	181

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Nr. 18—35. Zwei unter einem beliebigen Winkel an einem Punkte angreifende Kräfte; 265 Beispiele	5	182
Aufgabe 18 Beispiel 16 ist der gegebene Winkel nicht 120°, sondern 120° 1′	6	
Auflösung 34c ist nur der für die Rechnung bequemere Ausdruck für $sin\{Q, R-P, R\}$ angegeben worden; aus letzterem geht durch Umrechnung hervor: $tg\{Q, R-P, R\} = \frac{(P+Q)\ sin\alpha\ cos^2\lambda}{\sqrt{(P-Q)^2-(P+Q)^2\ sin^2\alpha\ cos^4\lambda}}$	10	187
Nr. 36—44. Mehr als zwei an einem Punkte angreifende Kräfte; 40 Beispiele über Kräfte in einer Ebene, sowie im Raume	11	187
Nr. 45—54. Parallele an Punkten einer festen Ebene angreifende und ganz in dieser Ebene enthaltene Kräfte; 80 Beispiele	14	189
Nr. 55—60. Parallele im Allgemeinen nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte; 15 Beispiele	18	191
Aufgabe 55 muss im 3. Beispiele die letzte Kraft nicht 6, sondern 5 sein	18	
Aufgabe 56 bezieht sich auf die in Aufgabe 55 gegebenen Coordinaten	18	
Nr. 61—89. Schwerpunkt; 105 Beispiele über Ermittelung desselben bei Linien, Flächen, Körpern . .	20	192
Auflösung 89. Der Werth von x_m wird bei Einführung der Abkürzung $k=\frac{C}{fs}$ erhalten . . .	26	199
Nr. 90—95. Kräftepaare; 10 Beispiele	27	199
Nr. 96—100. Kräfte, welche in verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen und deren Richtungen nicht parallel sind; 5 Beispiele	28	199
Nr. 101—115. Gleichgewicht von Körpern auf horizontalem und geneigtem Boden, sowie von aufgehangenen Körpern, Stabilität; 80 Beispiele, unter anderen über berganlaufende Cylinder und Doppelkegel	29	200
Nr. 116—131. Gleichgewicht einfacher Maschinen ohne Berücksichtigung der Reibung; 75 Beispiele . .	34	203
Aufgabe 118 Beispiel 3 und 4. Der Auflösung entsprechen besser die Winkel 162° 32.5′	35	
Aufgabe 122c d ist die Bedingung $r_2=0$ hinzuzufügen.		

	Aufg. Seite	Auflös. Seite.
Nr. 132—137. Gleichschenklige Wage; 35 Beispiele über Empfindlichkeitsberechnung, Correctionen bei Ungleichschenklichkeit und an Gewichtssätzen .	38	205
Aufgabe 134 C ist das Balkengewicht nicht 54400 mg, sondern 544000 mg	40	
Nr. 138—141. Schiefe Ebene, Keil, Schraube mit Berücksichtigung der Reibung; 35 Beispiele . . .	42	207
Nr. 142—146. Elasticität und Festigkeit; 25 Beispiele incl. über die Durchbiegung von Wagbalken . .	44	209
Nr. 147—154. Gleichförmige Bewegung; 15 Beispiele	45	210
Aufgabe 149. A hat die Geschwindigkeit c, A_1 hat die Geschwindigkeit c_1	46	
Nr. 155—158. Gleichförmig beschleunigte Bewegung; 30 Beispiele	47	211
Nr. 159—167. Wurfbewegung im luftleeren Raume; 40 Beispiele	48	211
Nr. 168—175. Masse, Dichtigkeit, bewegende Kraft, Beschleunigung; 40 Beispiele	50	214
Nr. 176—181. Fall der Körper auf schiefen Ebenen und bei der Atwood'schen Fallmaschine ohne Berücksichtigung der Reibung; 25 Beispiele . . .	51	215
Nr. 182—189. Bewegung bei Gegenwart von Reibungswiderständen; 30 Beispiele	52	216
Nr. 190—200. Trägheitsmomente; 25 Beispiele . .	54	217
Nr. 201—203. Constante Kräfte an einem Körper mit einer festen Axe; 45 Beispiele	57	220
Nr. 204—212. Fliehkraft; 25 Beispiele, auch über die Centrifugalkraft der rotirenden Erde	58	221
Nr. 213—225. Pendel; 30 Beispiele incl. über die Schwingungen von Wagen bei verschiedenen Belastungen	60	222
Nr. 226—231. Stoss der Körper; 75 Beispiele, auch über unvollkommen elastischen Stoss	65	225
Nr. 232—238. Wirkungsgrösse der Kräfte; 25 Beispiele über hervorgebrachte und verbrauchte Wirkung .	67	227
Aufgabe 236. Eine Pferdekraft bringt in einer Sekunde eine Wirkung von 75 Kgm hervor . . .	68	

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Nr. 239—244. Druck flüssiger Körper auf den Boden und die Seitenwände der einschliessenden Gefässe; 15 Beispiele	69	228
Nr. 245—262. Hydrostatischer Auftrieb und Bestimmung des specifischen Gewichtes fester und flüssiger Körper	70	229
Aufgabe 251. Die Ueberschrift der zweiten Rubrik soll nicht Gewicht in Alkohol heissen, sondern Auftrieb in Alkohol	71	
Nr. 263—269. Tiefe des Eintauchens schwimmender Körper; 40 Beispiele, auch über Aräometergraduirung und Prüfung	74	232
Aufgabe 268. Die numerische Berechnung führt man am bequemsten mit den Reciproken der betreffenden Grössen aus.		
Nr. 270—273. Capillarität; 25 Beispiele	76	234
Aufgabe 270. Die Steighöhe von 4.5 mm bezieht sich auf eine Röhre von 1 mm Halbmesser	76	
Nr. 274—279. Ausfluss von Flüssigkeiten; 35 Beispiele	77	235
Nr. 280—283. Luftdruck und Barometer; 20 Beispiele	78	236
Nr. 284—293. Mariotte's Gesetz; 60 Beispiele . . .	79	236
Aufgabe 291 Seite 81. Bei der Berechnung empfiehlt sich Theilung der Arbeit in folgende drei Theile:		
a) Berechnung der Höhe h_1 des geschlossenen Schenkels von dem dem Luftdruck p_1 entsprechenden Niveau an gerechnet. Man findet: $$h_1 = h + \frac{p_1 - p}{2}.$$		
b) Berechnung des Niveauunterschiedes nach dem Einbringen der Luftmenge n (in einer im Querschnitt dem Barometer gleichen Röhre beim Druck p_1 gemessen) in das Barometer, während der äussere Druck p_1 ist. Man findet: $$x = h_1 \pm \sqrt{h_1^2 + p_1\,(2n - 2h_1 + p_1)}$$		
c) Einsetzung des unter a) mitgetheilten Werthes von h_1 in letzteren Ausdruck für x, was nach einigen Umrechnungen auf die Seite 239 gegebene Auflösung führt.		
Nr. 294—296. Luftpumpe; 15 Beispiele, auch über die Geissler'sche Quecksilberluftpumpe	82	239

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Nr. 297—301. Aerostatischer Auftrieb; 50 Beispiele .	84	240
Aufgabe 301. Die specifischen Gewichte in Aufgabe 299 liegen zu Grunde	85	
Nr. 302—304. Druck der Luft in einer unendlich hohen cylindrischen Röhre; 15 Beispiele	85	241

Zweite Abtheilung. Wellenlehre und Akustik.

Nr. 1—11. Schwingungen eines Punktes und Wellenbewegung; 40 Beispiele, auch über Interferenzen	87	244
In den ersten Aufgaben bedeutet k eine positive Grösse, n eine ganze positive Grösse.		
Aufgabe 11 muss beim Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c das Wurzelzeichen bis auf g (die Beschleunigung der Schwere) ausgedehnt werden.		
Die Auflösung der Aufgaben wird allerseits sehr durch die graphische Darstellung der betreffenden Fälle unterstützt werden.		
Nr. 12—15. Fortpflanzung des Schalles in der Luft und anderen Medien; 40 Beispiele	92	248
Aufgabe 12. Den numerischen Beispielen liegt die Schallgeschwindigkeit $c = 343{,}35 = 35 \times 9.81$ m $= 35\,g$ zu Grunde	92	249
Auflösung 14. Scheinbares Intervall z und wirkliches Intervall i hängen durch die Beziehung zusammen: bei Annäherung: $z = \frac{c-v}{c+w} i$, bei Entfernung: $z = \frac{c+v}{c-w} i$; ist nun $\frac{v}{c}$ und $\frac{w}{c}$ klein genug, so gelten die Formeln auf Seite 249 und umfassen dann alle verschiedenen Fälle		249
Nr. 16—19. Tönende Wellen in der Luft; 20 Beispiele über Bestimmung der Wellenlängen und Schwingungsmengen aus dem Tonzeichen und umgekehrt	93	250
Nr. 20—27. Klänge durch Schwingungen fester, flüssiger und luftförmiger Körper; 30 Beispiele incl. Kundt'scher Versuch	94	251
Nr. 28—32. Differenztöne, Summationstöne, Stösse; 20 Beispiele	98	252

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Dritte Abtheilung. Optik.		
Nr. 1—11. Geradlinige Bewegung, Geschwindigkeit und Intensität des Lichtes; 50 Beispiele, incl. betreffend die Theorie von Bunsen's Photometer	99	254
Nr. 12—22. Spiegelung des Lichtes; 60 Beispiele, auch über Beobachtung mit Spiegel und Scala, Längen- und Seitenabweichung bei sphärischen Spiegeln und Bestimmung von deren Krümmungsradien .	102	256
Nr. 23—31. Brechung homogenen Lichtes beim Uebergange aus einem Mittel ins andere durch ebene Grenzflächen; 25 Beispiele	107	261
Nr. 32—33. Brechung homogenen Lichtes beim Uebergange aus einem Mittel ins andere durch eine sphärische Fläche; 5 Beispiele	109	263
Nr. 34—43. Brechung homogenen Lichtes in Linsen, die zu beiden Seiten an dasselbe Medium grenzen; 30 Beispiele, betr. Lage der Cardinalpunkte, Bildlagen	110	264
Nr. 44—45. Gang homogener Lichtstrahlen in einer aus mehreren brechenden Medien zusammengesetzten Substanz; 5 Beispiele, betr. das menschliche Auge und eine Schwefelkohlenstofflinse	114	266
Nr. 46—51. Sphärische Abweichung bei der Brechung homogener Lichtstrahlen; 15 Beispiele, Linsen betreffend	117	268
Nr. 52—53. Farbenzerstreuung in Prismen; 10 Beispiele	119	271
Nr. 54—56. Farbenzerstreuung bei der Brechung an sphärischen Flächen; 5 Beispiele	120	272
Nr. 57—59. Achromasie von Prismen; 5 Beispiele .	122	273
Nr. 60. Achromasie von Linsen; 5 Beispiele . . .	123	274
Nr. 61—70. Wellenbewegung des Lichtes; 40 Beispiele	123	274
Aufgaben 61, 63. Die Einheit, in der die Wellenlängen ausgedrückt sind, ist nicht 0.0001 m, sondern 0.0001 mm.	123 124	
Aufgabe 70. Die y sind horizontal, die z sind vertical	126	276
Vierte Abtheilung. Lehre von der Wärme.		
Nr. 1—8. Thermometrie; 45 Beispiele, auch über Correction und Calibrirung von Thermometern . .	127	277

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Nr. 9—20. Ausdehnung fester und tropfbarflüssiger Körper durch die Wärme; 50 Beispiele . . .	129	279
Aufgabe 20 b. Die ausgeflossenen 15.526 cbcm sind nach Erkaltung auf 0° C gemessen	133	
Nr. 21—32. Ausdehnung, Druck und Gewicht bei Gasen und Dämpfen; 60 Beispiele incl. Psychrometer.	133	282
Aufgabe 23. Die Anfangstemperatur der Luft ist 0° C.		
Nr. 33—36. Bewegung der Wärme; 10 Beispiele über Wärmestrahlung, Wärmeleitung	138	285
Nr. 37—46. Specifische Wärme, Schmelzwärme, Verdampfungswärme; 50 Beispiele	139	286
Nr. 47—53. Aequivalenz von Wärme und Arbeit; 20 Beispiele, incl. über innere und äussere Arbeit .	142	288

Fünfte Abtheilung. Lehre vom Magnetismus.

Nr. 1. Tragkraft von Magneten; 10 Beispiele . . .	145	290
Nr. 2—7. Absolutes Mass des Magnetismus und Fernewirkung magnetischer Theile; 25 Beispiele . .	145	290
Nr. 8—9. Bestimmungen an der Coulomb'schen Drehwage; 5 Beispiele	147	291
Nr. 10—11. Bestimmungen der magnetischen Axe; 5 Beispiele	148	292
Aufgabe 10 Beispiel 5. Die drei letzten Glieder in erster Zeile sollen heissen: $x = r$, $x = r\cos 60^0$, $x = -r\cos 60^0$	149	
Nr. 12—20. Schwingungen von Magnetstäben und Horizontalintensität des Erdmagnetismus; 35 Beispiele	149	293
Nr. 21—22. Declination; 5 Beispiele	153	296
Nr. 23—25. Inclination der Magnetnadel; 5 Beispiele	154	296
Nr. 26. Totalintensität als Erdmagnetismus; 5 Beispiele	155	297

Sechste Abtheilung. Lehre von der Electricität.

Nr. 1—4. Bestimmungen an der Coulomb'schen Drehwage; 15 Beispiele	156	298
Nr. 5—6. Electrischer Zustand auf der Oberfläche von Ellipsoiden und Kugeln; 10 Beispiele	157	300
Nr. 7—11. Entladung der Electricität; 15 Beispiele, auch Wheatstone's Versuch betreffend	158	300

	Aufg. Seite.	Auflös. Seite.
Nr. 12—19. Leitungswiderstand electrischer Ströme; 25 Beispiele, auch über einfache Verzweigung und Widerstandsbestimmung	160	301
Nr. 20—23. Ohm'sches Gesetz im Schliessungskreise constanter Elemente; 60 Beispiele, auch die Kirchhoff'schen Sätze betreffend	161	303
Nr. 24—26. Chemische Wirkungen des Stromes, Polarisation; 25 Beispiele	163	304
Nr. 27—33. Magnetische Wirkungen des galvanischen Stromes; 30 Beispiele, auch Substitution von Strömen und Magneten und Rotation von Magneten unter Stromeinfluss betreffend	165	305
Nr. 34—37. Electromagnetismus; 20 Beispiele, betreffend die Momente von Electromagneten, aus der Stromstärke hergeleitet	169	308
Aufgabe 36 nahe dem Schluss. Der Strom von 100 Jacobi'schen Einheiten bewirkt beim Electromagneten das Moment: 1050×10^6	171	
Nr. 38—41. Gegenseitige Einwirkung von Stromleitern; 5 Beispiele	172	310
Nr. 42—43. Wanderung von Electricität und Wärme durch den Schliessungskreis; 5 Beispiele über Menge der bewegten Electricität und der im Schliessungskreise verbrauchten Wärme . . .	174	310

I. Abtheilung.

Mechanische Naturlehre.

Kräfte, welche in gleicher und gerade entgegengesetzter Richtung an einem Punkte angreifen.

1. In folgenden Beispielen sind in gleicher Horizontalreihe Kräfte aufgeführt, welche an einem Punkte wirken. x ist so zu berechnen, dass die Kräfte jedes Beispiels im Gleichgewicht stehen.

	In gleicher Richtung wirken die Kräfte:					In entgegengesetzter Richtung wirken die Kräfte:				
1) [1]	20	35	70	x		10	45	15	30	$2x$
2)	10	20	30	$25x$		50	70	90	90	x
3)	40	50	60	$8x$		100	50	200	150	x
4)	10	20	30	$13x$		40	50	60	70	$5x$
5)	95	85	75	x		65	55	45	35	$12x$
6) [2]	2	3	5	7	$-x$	5	1	7		$+x$
7)	4	6	8	2	$-x$	2	3	5		$+x$
8)	6	4	6	4	$-x$	2	5	7		$+x$
9)	2	4	6	8	$-x$	2	7	9		$+x$
10)	1	3	5	7	$-x$	1	7	8		$+x$.

2. Bei folgenden in gleicher Horizontalreihe aufgeführten Kräften sind x und y so zu berechnen, dass das Verhältniss der Resultante der zuerst angeführten in gleicher Richtung wirkenden Kräfte und der Resultante der zu den vorigen entgegengesetzt gerichteten Kräfte den in jedem Beispiel angegebenen Werth erlangt, ohne dass die Grösse und Richtung der Mittelkraft aller Kräfte sich ändert.

	In gleicher Richtung wirken die Kräfte:					In entgegengesetzter Richtung wirken:		Verhältniss der Resultanten:
1) ([3])	15	20	30	70	x	120	y	$\frac{16}{15}$
2)	1	3	5	7	x	9	y	$\frac{3}{2}$
3)	1	2	4	6	x	8	y	$\frac{5}{4}$
4)	1	3	3	1	x	4	y	2
5)	3	5	4	2	x	2	y	7.

3. In jedem der folgenden Beispiele ist den zuerst aufgeführten vier gleichwirkenden Kräften eine Kraft x, den fünf entgegengesetzt wirkenden Kräften eine Kraft y von solcher Grösse beizufügen, dass dadurch die Resultante, sowie die Summe aller Kräfte, die in derselben Horizontalreihe angegebenen Werthe erlangen.

	In gleicher Richtung wirken die Kräfte:				In entgegengesetzter Richtung wirken:					Der Kräfte Resultante:	Summe:
1) ([4])	4	6	9	12	5	7	12	17.5	12.5	0	200
2)	1	4	5	9	2	3	4	6	8	70	130
3)	2	4	6	8	1	3	5	7	9	0	70
4)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	50	150
5)	1	3	5	7	2	4	6	8	10	5	75.

4. Die in jedem der folgenden zehn Beispiele angegebene Kraft R ist in zwei Componenten X und Y zu zerlegen, deren Grösse zu berechnen ist. Jedes Beispiel enthält Bestimmungen über die Richtung von X und von Y und über das Verhältniss $X : Y$, welches die Componenten haben sollen.

	Grösse der Kraft R:	Richtung der Comp. X:	Richtung der Comp. Y:	Verhältniss $X : Y$:
1) ([5])	100	wie R	wie R	$\frac{3}{5}$
2)	140	desgl.	desgl.	$\frac{3}{4}$
3)	290	desgl.	desgl.	$\frac{14}{15}$
4)	55	desgl.	desgl.	$\frac{8}{3}$
5)	180	desgl.	desgl.	$\frac{2}{7}$
6) ([6])	1000	desgl.	entgegen R	$\frac{5}{3}$
7)	30	desgl.	desgl.	$\frac{7}{4}$
8)	5	desgl.	desgl.	$\frac{12}{11}$
9)	34	desgl.	desgl.	18
10)	100	desgl.	desgl.	$\frac{27}{2}$.

5. In jedem der folgenden fünf Beispiele ist eine Kraft und das Verhältniss der sechs gleichgerichteten Componenten gegeben, in welche die Kraft zerlegt werden soll.

Zu berechnen ist die Grösse jeder Componente.

	Grösse der Kraft:	Verhältniss der Componenten unter einander:
1) (7)	441	$1 : 2 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5$
2)	72	$1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11$
3)	64	$5 : 4 : 3 : 2 : 1 : 1$
4)	54	$0 : 1 : 2 : 3 : 5 : 7$
5)	224	$11 : 13 : 17 : 19 : 23 : 29.$

6. Die Kraft, deren Grösse in jedem der fünf folgenden Beispiele gegeben ist, ist zu zerlegen: in eine Gruppe von drei mit der Resultante gleichgerichteten Componenten und in eine Gruppe von drei zur Resultante entgegengesetzt gerichteten Componenten. Gegeben ist in jedem Beispiele das Verhältniss der Kräfte jeder Gruppe unter einander und das Verhältniss der Resultante der ersten Gruppe zur Resultante der zweiten Gruppe.

Zu berechnen ist in jedem Beispiele die Grösse von jeder der sechs Componenten.

	Grösse der Kräfte:	Verhältniss der Kräfte in der ersten Gruppe:	Verhältniss der Kräfte in der zweiten Gruppe:	Verhältniss der Gruppenresultanten:
1) (8)	44	1 : 3 : 5	1 : 2 : 3	5.4
2)	180	1 : 2 : 3	4 : 5 : 6	3
3)	342	5 : 6 : 7	4 : 3 : 2	20
4)	544	6 : 5 : 6	5 : 6 : 5	2
5)	360	5 : 4 : 3	3 : 2 : 1	6.

Zwei unter einem rechten Winkel an einem Punkte angreifende Kräfte.

7. In jedem der folgenden Beispiele sind zwei Kräfte P und Q gegeben. Zu berechnen ist die Grösse der Resultante R.

	1 (10).	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$P =$	3	5	8	20	12	28	33	39	39	36
$Q =$	4	12	15	21	35	45	56	52	80	77.

8. In jedem der folgenden Beispiele sind zwei Kräfte P und Q gegeben. Wie gross ist die Resultante R und die Winkel (Q, R) und (Q, R)?

	1 (9).	2.	3.	4.	5.
$P =$	5	10	$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}$	$\sqrt{8-4\sqrt{3}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$Q =$	$5\sqrt{3}$	10	$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}}$	$\sqrt{8+4\sqrt{3}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$

	6.	7.	8.	9.	10.
$P =$	$4\sqrt{3}$	8	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}$	$\sqrt{32-16\sqrt{2}}$
$Q =$	4	8	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}$	$\sqrt{32+16\sqrt{2}}$.

9. Aus dem in den folgenden Beispielen gegebenen Verhältniss zweier Kräfte ist der Winkel, welchen die grössere Kraft, sowie der Winkel, welchen die kleinere Kraft mit der Resultante bildet, zu berechnen.

1 (11).	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$.

10. Zerlegung einer Kraft in zwei gegeneinander rechtwinklige Componenten, wenn die Kraft selbst und der Winkel gegeben ist, welchen dieselbe mit der einen Componente bildet. Zu berechnen die Grösse der Componenten.

Die Kraft 100 bildet mit der einen Componente den Winkel:

	1 (12).	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Grade:	65	55	45	35	75	85	80	70	60	50

Die Kraft 1000 bildet mit der einen Componente den Winkel:

	11 (15).	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Grade:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11. Die Kraft R ist in zwei gegen einander rechtwinklige Componenten zu zerlegen, welche in einem in jedem der zehn folgenden Beispiele angegebenen bestimmten Verhältnisse stehen sollen. Wie gross ist jede der Componenten?

1 (14).	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$\frac{m}{n}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{tg\,b}$	$\frac{m\sqrt{2}+n}{m\sqrt{2}-n}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{44}{117}$	$\frac{48}{55}$	$\frac{155}{468}$	$\frac{145}{408}$	$\frac{185}{408}$.

12. Zerlegung einer Kraft R in zwei gegeneinander rechtwinklige Componenten X und $X+a$. Aus den in den zehn Beispielen angegebenen zusammengehörigen Werthen von R und a ist die Componente X zu berechnen.

	1 (16).	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$R =$	50	73	250	340	159	13	17	39	29	130
$a =$	10	7	146	164	51	7	7	21	1	46.

13. Eine Kraft von der Grösse 10 wird in zwei gegeneinander rechtwinklige Componenten zerlegt, von denen in jedem der zehn folgenden Beispiele die eine gegeben ist. Wie gross ist der Nei-

gungswinkel zwischen der gegebenen Componente und der Resultante?

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8 (13).	9.	10.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

14. Welche Zunahme erleidet die Resultante R der Kräfte P und Q, wenn man die Kraft P um $\frac{1}{10000}$ ihres Werthes vermehrt?

15. Welche Zunahme erleidet die Resultante R der Kräfte P und Q, wenn man die Kraft P, sowie die Kraft Q, jede um $\frac{1}{10000}$ ihres Werthes vermehrt?

16. Um wie viel muss man in den zehn Beispielen der Aufgabe 7 die grössere Kraft vermindern, wenn die kleinere Kraft um $\frac{1}{10000}$ ihres Werthes vermehrt wird und dabei die Grösse der Resultante unverändert bleiben soll?

17. Wenn zwei Kräfte P und Q zu einer Resultante vereinigt werden, ist die Tangente des Winkels zwischen P und der Resultante R bekanntlich $\frac{Q}{P}$.

1) Wie verändert sich diese Tangente, wenn man P um den zehntausendsten Theil seines Werthes zunehmen lässt?

2) Wie verändert sich der Winkel $\alpha = (P, R)$, wenn diese Veränderung im Bogenmaass (Radius = 1) ausgedrückt werden soll?

3) Wie verändert sich der Winkel $\alpha = (P\,R)$? Die Veränderung ist in Bogenminuten auszudrücken.

Zwei unter einem beliebigen Winkel an einem Punkte angreifende Kräfte.

18. Die Resultante zweier an einem Punkte angreifender gleicher Kräfte ist aus der in den Beispielen angegebenen Grösse der Kräfte und aus dem von beiden eingeschlossenen Winkel zu berechnen.

	1 (17).	2.	3.	4 (18).	5.
Grösse jeder Kraft:	100	100	100	100	100
Neigung beider Kräfte, Grade, Minuten:	45^0	$45^0 1'$	$44^0 59'$	60^0	$60^0 1'$

	6.	7([19]).	8.	9.	10.
Grösse jeder Kraft:	100	P	P	P	P
Neigung beider Kräfte, Gr., Min.:	59°59′	82°49.16′	82°50.16′	82°48.16′	90°1′
	11.	**12([20]).**	**13.**	**14.**	**15.**
Grösse jeder Kraft:	P	P	P	P	P
Neigung beider Kräfte, Gr., Min.:	89°59′	113°16′	113°17′	113°15′	120°
	16.	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
Grösse jeder Kraft:	P	P	P	P	P
Neigung beider Kräfte, Gr., Min.:	120°	119°59′	135°	135°1′	134°59′
	21.	**22.**	**23.**	**24.**	
Grösse jeder Kraft:	P	P	P	P	
Neigung beider Kräfte, Gr., Min.:	150°	150°1′	149°59′	179°59′.	

19. Die Resultante zweier gleichen Kräfte ist 3,456. Wie gross ist der von den beiden Kräften eingeschlossene Winkel, wenn jede der beiden gleichen Kräfte einen der folgenden Werthe hatte?

1([21]).	2.	3.	4.	5.
2.3040	2.3039	2.3038	2.3041	2.3042.

20. Die Kraft 125 ist in zwei unter sich gleiche Componenten zu zerlegen. Wie gross ist jede der Componenten, wenn der von ihr mit der Resultante eingeschlossene Winkel gegeben ist und dafür einer der zwischen 0 Grad und 90° liegenden siebenzehn Winkel: 5×1 Grad, 5×2 Grad, ... 5×17 Grad genommen wird.

21. Die Kraft R wird in zwei unter sich gleiche Componenten zerlegt. Wie gross ist der von jeder Componente mit der Resultante eingeschlossene Winkel, wenn jede der Componenten einen der in den folgenden fünfzehn Beispielen angegebenen Werthe hat?

Jede Componente ist gleich R multiplicirt mit:

1.	2.	3.	4.	5.
0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

6(36).	7.	8.	9.	10.
1	2	3	4	5
11.	12.	13.	14.	15.
6	7	8	9	10.

22. Eine Kraft von der Grösse 125 soll in zwei einander gleiche Componenten zerlegt werden. Wie gross ist der Winkel zwischen Resultante und jeder der gleichen Componenten zu nehmen, wenn für jede der letztern von Haus aus einer der in den folgenden neun Beispielen aufgeführten Werthe gegeben ist?

1.	2.	3.	4.	5.
125	250	350	375	500
6.	7.	8.	9.	
625	750	875	1125.	

23. Die Kraft 100 ist in zwei unter sich gleiche Componenten zu zerlegen. Welchen Winkel schliesst jede der Componenten mit der Resultante ein, sobald jede der Componenten einen der in den folgenden zehn Beispielen angegebenen Werthe hat?

1.	2.	3.	4(39).	5.
50	100	150	200	250
6.	7.	8.	9.	10.
300	350	400	450	500.

24. Zwei einander gleiche Kräfte jede gleich 100 schliessen einen der in folgenden fünf Beispielen angegebenen Winkel ein. Welche Zunahme erleidet die Resultante der zwei Kräfte, wenn jeder der in den Beispielen genannten Winkel um $3\frac{1}{2}$ Minute wächst?

Grad: 30 60 90 120 150.

25. Wenn man bei den fünf Beispielen der vorigen Aufgabe zwar den Neigungswinkel beider Kräfte, jede $= 100$ um $3\frac{1}{2}$ Minuten vergrössert, dafür aber jede Kraft $= 100$ um soviel vermehrt, dass die Resultante der Kräfte ihren früheren Werth beibehält, den sie vor der Winkel- und Componentenveränderung hatte; um wieviel ist jede Componente in den fünf in Aufgabe 24 angenommenen Beispielen zu vermehren?

26. In jedem der folgenden Beispiele sind zwei Kräfte und der Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Neigungswinkels gegeben.

Wie gross ist die Resultante der Kräfte?

	1.	2.	3(23).	
Kräfte:	8	2	P	
	2	1	Q	
Cosinus des Winkels:	$\frac{13}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\alpha - \frac{(1-\alpha^2)}{2}\frac{Q}{P}$,	α ein positiver oder negativer echter Bruch.

	4.	5.	6.	7.	8(24).
Kräfte:	1	10	10	10	P
	2	1	4	2	Q
Cosinus d. Neigungswinkels:	-0.89	$+0.0505$	-0.098	$+0.001$	$\frac{1}{10} - 0.495\frac{Q}{P}$

	9.	10.	11.	12.	13(25).
Kräfte:	20	10	10	10	P
	21	12	6	3	Q
Cosinus d. Neigungswinkels:	$-\frac{2}{15}$	-0.2	$\frac{1}{15}$	0.2	$\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\frac{Q}{P}$.

27. Folgende vier Beispiele enthalten die Daten zur Berechnung der Grösse der Resultante.

Wie gross ist die Resultante?

	1.	2.	3.	4(22).
Die eine Kraft:	1	1	1	P
die andere Kraft:	3	2	1	Q
Sinus des von beiden Seiten eingeschlossenen Neigungswinkels:	$\sqrt{\frac{39}{64}}$	$\sqrt{\frac{15}{16}}$	$\frac{3}{8}\sqrt{7}$	$\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\frac{Q}{P} - \frac{9}{64}\frac{Q^2}{P^2}}$
der Winkel ist:	stumpf	stumpf	spitz	spitz.

28. Berechnung der Grösse der Resultante aus zwei gegebenen Kräften von ungleicher Grösse und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

A. Die Kräfte 100 und 50 schliessen einen zwischen 45 Grad und 45 Grad 20 Minuten liegenden Winkel ein, der innerhalb der angegebenen Grenzen um eine beliebige Anzahl ganzer Minuten grösser ist als 45 Grad (für 45 Grad 29.)

Wie gross ist die Resultante R?

B. Die Kräfte 10 und 1 schliessen einen zwischen 87 Grad 6 Minuten und 87 Grad 15 Minuten liegenden Winkel ein, der innerhalb der angegebenen Grenzen um eine beliebige An-

zahl ganzer Minuten grösser ist, als der Winkel von 87 Grad 6 Minuten.

Wie gross ist die Resultante?

C. Die Kräfte 6 und 8 schliessen einen zwischen $96^0\,23'$ und $97^0\,0'$ gelegenen, um beliebige ganze Minuten grössern Winkel als $96^0\,23'$ ein (für 96^0 23—28).

Wie gross ist die Resultante?

D. Die Kräfte 100 und 50 schliessen einen zwischen 145^0 und $145^0\,20'$ messenden, innerhalb dieser Grenzen um beliebige ganze Minuten grössern Winkel als 145^0 ein (für 145 Grad [30]).

Wie gross ist die Resultante?

29. Gegeben zwei Kräfte und der von ihnen eingeschlossene Neigungswinkel. Zu berechnen die von der Resultante mit jeder der beiden Componenten gebildeten Winkel.

Als Beispiele sind die in Aufgabe 28 A und D angedeuteten gewählt worden.

30. Wenn zwei Kräfte P und Q eine Resultante von der in den folgenden zwölf Beispielen angegebenen Grösse haben sollen, wie gross muss der Cosinus des Neigungswinkel der beiden Kräfte sein?

1.	2. ([35])	3. ([25])	4.	5.	6.	
$P+Q$	$P+\frac{1}{2}Q$	$P+\frac{1}{3}Q$	$P+\frac{1}{4}Q$	$P+\frac{1}{5}Q$	$P+\frac{1}{n}Q$	$n>1$
7.	8.	9.	10.	11.	12.	
$P-Q$	$P-\frac{1}{2}Q$	$P-\frac{1}{3}Q$	$P-\frac{1}{4}Q$	$P-\frac{1}{5}Q$	$P-\frac{1}{n}Q$	$n>1$.

31. Gegeben eine Kraft $= 100$ und in den folgenden zehn Beispielen die Winkel, welche sie mit zwei Componenten, in welche sie zu zerlegen ist, einschliesst. Wie gross sind die Componenten?

	1 ([40]).	2.	3.	4.	5.
Grade:	10	10	10	10	20
	20	30	40	50	30
	6.	7.	8.	9.	10.
Grade:	20	20	30	30	40
	40	50	40	50	80.

32. Gegeben eine Kraft $R = 100$, welche in Componenten von gegebener Grösse zerlegt werden soll. Zu berechnen sind die Neigungswinkel, welche die kleinere Kraft und welche die grössere Kraft mit der Resultante bildet aus den in folgenden Beispielen angenommenen Werthen der Componenten.

1 (43).	2.	3.	4 (44).
20	81.521	88.454	100
90	36.397	20.051	150.

33. Eine Kraft und die beiden Componenten, in welche sie zerlegt werden soll, sind gegeben. Welches ist bei folgenden vier Beispielen der Ausdruck für die Tangenten der Winkel, welche die Resultante mit den Componenten einschliesst?

	1.	2 (41).	3.	4.
Kraft:	R	R	R	R
Componenten:	Q	Q	Q	$\frac{R}{n}$
	P	$2Q$	nQ	R

$n > 1.$

34 a. (46) Zwei Kräfte P und Q schliessen den Winkel α ein. $P > Q$.

Es ist der Werth der Resultante R und des $cos \frac{1}{2}\{[Q, R] - [P, R]\}$ ausgedrückt in $A = \frac{P+Q}{2}$, in $G = \sqrt{PQ}$ und in $\frac{1}{2}\alpha$, zu berechnen.

b. Es ist zu berechnen $tg \frac{1}{2}\{[Q, R] - [P, R[\}$ und in P, Q, $\frac{1}{2}\alpha$ und einem Hülfswinkel $\varphi = Arctg \frac{Q}{P}$ auszudrücken.

c. Es ist R und $tg\{[Q, R] - [P, R]\}$ auszudrücken in P, Q, α und einem Hülfswinkel $\lambda = Arctg \frac{2 cos \frac{1}{2}\alpha}{P - Q}\sqrt{PQ}$.

35 a. Zwei Kräfte P und Q schliessen den Winkel α ein. Welche Zunahme erleidet die Resultante R der beiden Kräfte, wenn α um $\Delta\alpha$ vergrössert wird (Bogenmaass)?

b. In jedem der folgenden sechs Beispiele sind zwei Kräfte gegeben, welche einen Winkel von 90 Grad einschliessen. Um wieviel nimmt die Resultante ab, wenn der eingeschlossene Winkel um $3\frac{1}{2}$ Minute zunimmt?

1.	2.	3.	4.	5.	6.
12	15	21	35	45	P
5	8	20	12	28	Q.

c. Zwei Kräfte jede $= P$, welche den Winkel α einschliessen, wirken an einem Punkte.

Wie gross ist die Zunahme der Resultante und der beiden Winkel, welche dieselbe mit den Componenten einschliesst, wenn die eine der gleichen Kräfte P in $P + \Delta P$ übergeht?

Mehr als zwei an einem Punkte angreifende Kräfte.

36. Es sind Kräfte, die an einem Punkte wirken und deren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, gegeben, sowie die Winkel, welche die Kräfte mit der positiven X-Axe eines in die Ebene der Kräfte gelegten Coordinatensystems bilden, dessen Anfangspunkt mit dem Angriffspunkt aller Kräfte zusammenfällt.

Zu berechnen ist die Resultante der Kräfte, sowie der Winkel, welchen dieselbe mit der positiven X-Axe einschliesst.

A. Neun Kräfte, jede $= 1$, wirken auf den Punkt. In folgenden zwei Beispielen sind die von den Kräften mit der positiven X-Axe eingeschlossenenen Winkel in Graden angegeben.

1) ([47])	0	30	45	60	90	120	135	150	180
2)	10	170	320	350	190	140	220	0	40.

B. Fünf Kräfte, welche nebst den mit der positiven X-Richtung von ihnen gebildeten Winkeln, in folgenden drei Beispielen aufgeführt sind, wirken auf den Punkt.

1 ([48]).		2.		3.	
Kräfte:	Winkel mit X Grade:	Kräfte:	Winkel mit X Grade:	Kräfte:	Winkel mit X Grade:
90	50	1	360	0	0
100	120	2	180	1	45
120	170	3	120	2	90
50	250	4	90	3	135
40	290	5	72	4	180.

37. In jedem der folgenden fünf Beispiele sind drei Kräfte gegeben, welche am Anfang eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystems angreifen und deren Richtungen mit den positiven Richtungen der Coordinatenaxen zusammenfallen.

Zu berechnen ist die Resultante (R), sowie die Winkel, welche dieselbe mit den positiven Axenrichtungen einschliesst.

Kraft in der	1 ([49]).	2.	3 ([50]).	4.	5.
X-Achse:	100	R	2	$3\sqrt{2}$	3
Y-Achse:	100	R	3	$4\sqrt{2}$	4
Z-Achse:	100	R	4	$5\sqrt{2}$	12.

38. (51) In folgender Tabelle sind vier Kräfte und die Winkel gegeben, welche sie mit den positiven Axen eines in den gemeinsamen Angriffspunkt gelegten Raumcoordinatensystemes bilden. Wie gross sind die drei in Richtung der Coordinatenaxen wirkenden Componenten, durch welche sich die gegebenen Kräfte ersetzen lassen und wie gross ist die Resultante des Systems?

Grösse der Kräfte:	Winkel der Kräfte in Graden mit der X-Axe:	Y-Axe:	Z-Axe:
50	20	70	90
60	50	90	40
70	90	30	60
80	40	80	51°45.9′.

39. Es sind mehrere Kräfte gegeben, sowie die Winkel, welche sie mit der positiven X und Y-Richtung eines in ihren gemeinsamen Angriffspunkt gelegten rechtwinkligen Raumcoordinatensystems bilden.

A. Aus den in folgenden vier Beispielen niedergelegten Daten sind die drei Componenten in Richtung der positiven Coordinatenaxen zu berechnen, durch welche sich die Resultante des Systems ersetzen lässt.

1 (52).

Kräfte:	Winkel d. Kr. mit der X-Axe:	Y-Axe:	Z-Axe:
200	60 Gr.	50 Gr.	spitz
300	50 „	60 „	stumpf
400	40 „	70 „	spitz

2.

Kräfte:	Winkel d. Kr. mit der X-Axe:	Y-Axe:	Z-Axe:
200	60 Gr.	130 Gr.	stumpf
300	130 „	60 „	stumpf
400	140 „	110 „	stumpf.

3.

Kräfte:	Winkel d. Kräfte mit der X-Axe:	Y-Axe:	Z-Axe:
200	120 Gr.	130 Gr.	stumpf
300	50 „	120 „	stumpf
400	140 „	70 „	stumpf

4.

Kräfte:	Winkel d. Kräfte mit der X-Axe:	Y-Axe:	Z-Axe:
200	60 Gr.	130 Gr.	stumpf
300	130 „	120 „	stumpf
400	40 „	110 „	stumpf.

B. Folgende Tabelle enthält in derselben Weise, wie bei den vorigen Beispielen unter A die nothwendigen Daten bezüglich vier Kräften aufgezeichnet, um die drei Componenten der Resultante in Richtung der Axen, letztere selbst und die von ihr mit den Axen gebildeten Winkel zu berechnen (53).

Kräfte:	Winkel der Kräfte mit der		
	X-Axe:	Y-Axe:	Z-Axe:
100	120 Grad	60 Grad	ist spitz
200	60 „	120 „	ist stumpf
300	120 „	120 „	ist spitz
400	60 „	60 „	ist stumpf.

40. Mit dem einen Eckpunkt eines Würfels von der Seite P möge zugleich der Anfang eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystems zusammenfallen und die von jenem Eckpunkt ausgehenden drei Würfelkanten mit den positiven Axen des Coordinatensystemes. Betrachtet man die von einem beliebigen Punkte innerhalb oder ausserhalb des Würfels aus nach den acht Eckpunkten des Würfels gezogenen Verbindungsgeraden ihrer Richtung und Grösse nach als Kräfte, so wird fernerweit die Aufgabe hieran geknüpft, die acht Kräfte durch drei Componenten zu ersetzen, von denen die eine Componente mit der X-Axe, die andere mit der Y-Axe und die dritte mit der Z-Axe zusammenfällt. Wie gross sind die drei Componenten in folgenden Specialfällen:

a) wenn der Angriffspunkt der Kräfte in den Coordinatenanfang fällt (54),

b) wenn er in die Mitte der Basis fällt, die in der XY-Ebene liegt,

c) wenn er die Coordinaten x, y hat und in der XY-Ebene liegt,

d) wenn er ausserhalb oder innerhalb des Würfels liegt und durch die Coordinaten x, y, z bestimmt ist.

41. Eine Pyramide möge als Grundfläche ein regelmässiges, in einen Kreis eingeschriebenes Vieleck haben und ihre Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche in der Höhe h liegen. Wenn nun die von der Pyramidenspitze nach den Eckpunkten der Grundfläche gezogenen Seitenkanten ihrer Grösse und Richtung nach Kräfte vorstellen, so fragt sich, wie gross ist die Resultante der Kräfte in folgenden Specialfällen?

a) die Grundfläche ist ein Dreieck,

b) „ „ „ „ Quadrat,

c) „ „ „ „ nEck.

42. Drei Kräfte P_1, P_2, P_3 wirken an einem Punkte; aus ihnen, sowie den von je zweien eingeschlossenen Winkeln P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3 ist die Resultante zu berechnen:

a) allgemein (57),

b) (56) wenn $P_1 = 100$, $P_2 = 150$, $P_3 = 200$
$P_1P_2 = 100^0$ $P_1P_3 = 110^0$ $P_2P_3 = 120^0$,

c) wenn jede Kraft $= P$, jeder Winkel $= \alpha$ ist,

d) wenn jede Kraft $= P$, jeder Winkel $= 60^0$ ist ([55]),

e) wenn jede Kraft $= P$, jeder Winkel $= 80^0\,24.\,3'$ ist.

43. Wie gross ist die Resultante von n gegebenen Kräften $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$, wenn die Neigungswinkel von jeder Kraft mit der andern gegeben sind, in folgenden Fällen:

a) allgemein,

b) bei n gegebenen einander gleichen Kräften P und wenn alle von zwei benachbarten Kräften eingeschlossenen Winkel einander gleich und gleich α sind,

c) bei 6 einander gleichen Kräften, jede $= 1$ und wenn alle von zwei benachbarten Kräften eingeschlossenen Winkel einander gleich und gleich 15^0 sind?

44. Die an einem Zugseile wirkende Kraft P soll ersetzt werden:

a) durch n Componenten, deren jede mit der Zugrichtung den Winkel α bildet,

b) durch n Componenten, deren jede mit der Zugrichtung den Winkel 20^0, 40^0, 60^0, 80^0 bildet,

c) durch 4 Componenten, deren jede mit der Zugrichtung den Winkel 20^0 bildet.

Wie gross muss jede an einem einzelnen Zweige wirkende Kraft sein?

Parallele, an Punkten einer festen Ebene angreifende und ganz in dieser Ebene enthaltene Kräfte.

45. Die Resultante und die Entfernung des Mittelpunktes zweier gleichgerichteten Kräfte von den beiden Angriffspunkten A und B der beiden Kräfte ist bei folgenden zehn Beispielen der Tabelle zu bestimmen:

	Kraft an A:	Kraft an B:	Entfernung AB in cm:	
1) ([58])	10	20	10	
2) ([59])	20	30	100	
3) ([60])	15	7	44	
4) ([61])	$7\frac{1}{7}$	$6\frac{6}{7}$	112	
5)	47	53	100	
6)	2	5	140	
7)	6	7	130	
8)	49	51	100	
9)	$P(\alpha-\beta)$	$P(\alpha+\beta)$	2α	$\alpha > \beta > 0$
10) ([62])	P	Q	e.	

46. Es ist die Resultante und die Entfernung des Mittelpunktes zweier entgegengesetzt gerichteter Kräfte von den beiden Angriffspunkten A und B der beiden Kräfte aus den Angaben folgender zehn Beispiele zu bestimmen.

	Kraft an A:	Kraft an B:	Entfernung AB in cm:	
1) (63)	19	13	12	
2) (64)	$7\frac{1}{7}$	$4\frac{1}{7}$	21	
3) (65)	0.421	0.309	5.6	
4) (66)	0.725	0.525	4	
5)	21	20	10	
6)	29	21	16	
7)	27	20	14	
8)	75	25	50	
9)	17	7	1	
10 (67)	P	Q	e	$P > Q$.

47. In einer festen Ebene liegt eine Gerade AB. An einem in dieser Geraden liegenden Punkte C greift eine Kraft an, welche in zwei an den Endpunkten A und B der Geraden angreifende gleichgerichtete Componenten zu zerlegen ist. Zur Berechnung der Componenten liefern folgende Beispiele die erforderlichen Daten.

	A liegt links von C um cm:	B liegt rechts von C um cm:	Grösse der Kraft:
1) (68)	6	9	15
2) (69)	74	7	81
3) (70)	187	15	101
4) (71)	7.55	16.45	12
5)	49	51	100
6)	30	2	16
7)	4	10	7
8)	7	20	9
9)	7	48	11
10) (72)	a	b	R.

48. An zwei Punkten der Abscissenaxe eines in die feste Ebene gelegten Coordinatensystemes wirken zwei gleichgerichtete Kräfte. Die Grösse derselben, sowie die Abscissen ihres Angriffspunktes sind in folgenden zehn Beispielen gegeben. Zu berechnen ist die Abscisse des Angriffspunktes der Resultante.

	Kraft:	Zugehörige Abscisse:	Kraft:	Zugehörige Abscisse:
1)	1	10	1	20
2)	1	5	5	15
3)	2	10	3	15
4)	15	13	1	45
5)	15	−8	2	9
6)	2	−8	17	11
7)	2	−54	19	−12
8)	15	−5	25	+3
9)	2	−14	7	4
10)	P	a	Q	b.

49. Die Abscissenaxe des in die feste Ebene gelegten Coordinatensystemes enthält den Angriffspunkt einer Kraft; auf ihr liegen auch die Angriffspunkte zweier gleichgerichteter Componenten, in welche die Kraft zu zerlegen ist. Welche Componenten entsprechen den in den nachstehenden zehn Beispielen aufgeführten gegebenen Grössen?

	Grösse der Kraft:	Abscisse ihres Angriffs-punktes:	Abscissen d. Angriffspunktes der einen Com-ponente:	der anderen Com-ponente:
1)	4	12	14	10
2)	5	15	16	11
3)	6	13	18	12
4)	8	16	20	12
5)	10	18	22	2
6)	15	20	21	6
7)	12	13	19	7
8)	9	13	17	8
9)	6	12	15	9
10)	3	8	13	1.

50. Der Angriffspunkt einer Kraft liegt auf der Abscissenaxe eines in die feste Ebene gelegten Coordinatensystemes, die Kraft soll in zwei gleichgerichtete Componenten zerlegt werden, deren Angriffspunkte ebenfalls in der Abscissenaxe liegen. Die Abscissen der Angriffspunkte der Componenten sind aus folgenden Daten (10 Beispiele) zu berechnen.

	Kraft:	Abscisse ihres Angriffs-punktes:	Die Componente näher am Coordinaten-anfang:	entfernter vom Coordinaten-anfang:	Distanz zwischen den Angriffs-punkten:
1)	10	18	4	6	5
2)	11	12	9	2	11
3)	7	10	2	5	14
4)	9	5	2	7	18
5)	14	-6	3	11	28
6)	$1+n$	r	1	n	d
7)	$2P+k$	r	P	$P+k$	d
8)	R	r	$\frac{1}{2}R-k$	$\frac{1}{2}R+k$	d
9)	R	r	$\frac{R}{n+1}$	$\frac{Rn}{n+1}$	r
10)	R	r	P	Q	d.

Die Grössen R, r, P, k, n, Q, d sind positiv.

51. Die Angriffspunkte von 1000, 1001 oder allgemein n gleichen Kräften liegen sämmtlich auf einer Geraden, je zwei benachbarte um 1 mm von einander entfernt.

Wie weit entfernt vom Anfang oder dem Ende der Kräfteschaar liegt der Angriffspunkt der Resultante?

52. Zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte sind nebst den rechtwinkligen Coordinaten ihrer Angriffspunkte in folgenden Beispielen gegeben.

Welches sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante?

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Die eine Kraft	5	6	32	4	6	7
$y=0$ $x=$	4	7	-3	-8	2	3
die andere Kraft	4	5	12	3	4	2
$y=0$ $x=$	2	3	3	-6	5	7.

53. Bezogen auf ein in die Wirkungsebene der Kräfte gelegtes, ebenes, rechtwinkliges Coordinatensystem, sind die Coordinaten der Angriffspunkte zweier paralleler Kräfte P und $Q < P$, resp. $xy, x'y'$.

Welches sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante, je nachdem die beiden Componenten gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben?

54. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches in der die Kräfte und ihre Angriffspunkte enthaltenden Ebene liegt,

sind in folgender Tabelle in jedem Beispiele vier Kräfte (P) nebst den Coordinaten ihrer Angriffspunkte angegeben.

Durch welche Coordinaten ist der Angriffspunkt der Resultante bestimmt; a. wenn alle Kräfte gleiche Richtung haben, b. wenn die Kraft P'' entgegengesetzt den übrigen dreien wirkt?

	1.	2.	3.	4.	5.
P	1	1	1	1	1
x	2	−3	−6	−8	12
y	5	0	−3	−5	15
P'	2	2	2	2	2
x'	5	0	−3	−5	15
y'	7	2	1	−3	17
P''	3	3	3	3	3
x''	6	1	−2	−4	16
y''	7	2	−1	−3	17
P'''	4	4	4	4	4
x'''	5	0	−3	−5	15
y'''	15	10	7	5	25.

Parallele, im Allgemeinen nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte.

55. Nachstehende vier Beispiele enthalten Angaben über die Grösse von vier auf eine Horizontalebene wirkenden Perpendicularpressungen, sowie über die Coordinaten der Angriffspunkte dieser Pressungen in Bezug auf ein in der Horizontalebene liegendes rechtwinkliges Coordinatensystem.

Welches sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante?

Coordinaten der		$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 7$
Angriffspunkte dcm:		$y_1 = 2$	$y_2 = 5$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$
Kräfte, die in den Angriffspunkten wirken, Pfund:	1. B.	4	5	6	3 (73)
	2. „	3	4	5	6
	3. „	6	3	4	6
	4. „	5	6	3	4.

56. Um welche Grösse müsste jede Abscisse und Ordinate der Angriffspunkte der ursprünglichen Drücke in Aufgabe 58 vermindert werden, damit die Resultante des Systemes in einen Punkt der Abscissenaxse fällt, welcher 1 dcm vom Anfangspunkt nach der positiven Seite der x zu entfernt liegt?

57. Durchläuft man den Umfang eines Quadrates (300 mm Seite) in demselben Sinne wie der Zeiger einer Uhr, so sollen die vier

auf einander folgenden Ecken von einer beliebigen anfangend mit A, B, C, D bezeichnet werden. In folgenden vier Beispielen sind gleichgerichtete Drücke angegeben, welche in den Ecken rechtwinklig gegen die Ebene des Quadrates wirken.

Wie viel (ganze) Millimeter beträgt die Entfernung des Mittelpunktes der Drücke von der Ecke C und D?

		1 (74).	2.	3.	4.
Druck in:	A	40	30	40	40
	B	30	40	20	30
	C	20	20	30	10
	D	10	10	10	20.

58. Eine in einem Punkte einer festen horizontalen Ebene perpendicular nach unten wirkende Kraft von 100 Pfund soll in drei parallele Componenten zerlegt werden, deren Angriffspunkte sind:

$x_1 = 4 \quad y_1 = 2 \quad x_2 = 6 \quad y_2 = 3 \quad x_3 = 2 \quad y_3 = 8.$

Wie gross sind die Componenten, je nachdem die Resultante in einem der folgenden Punkte ihren Angriffspunkt hat (bezogen wie oben auf ein in die Ebene gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem)?

	1 (75)	2.	3.
$X =$	10	5	0
$Y =$	10	5	0.

59. Im Mittelpunkte eines Kreises von 10 dcm Halbmesser wirkt eine Kraft von 100 Pfund senkrecht gegen die Ebene des Kreises, welche Kraft in drei parallele Componenten zu zerlegen ist, denen drei auf der Peripherie des Kreises liegende Punkte A, B, C als Angriffspunkte angewiesen sind. Wie gross sind die drei Componenten, wenn die drei vom Mittelpunkt aus nach den Peripheriepunkten A, B, C gezogenen Radien mit einem festen Durchmesser, resp. die Winkel 45^0, 180^0 und -45^0 einschliessen (76)?

60. Die an einem Körper wirkenden parallelen und gleichgerichteten Kräfte sind nebst den rechtwinkligen Coordinaten ihrer Angriffspunkte in folgender Tabelle zusammengestellt:

Kräfte in Pfunden:	Coordinaten der Angriffspunkte in Decimetern:		
	x	y	z
100	2	1	1
400	2	1	3
50	3	1	5
200	1	2	6
100	-1	2	8
400	4	4	10.

Welches sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante:

a) wenn die Angaben der Tabelle zu Grunde liegen,

b) wenn die Coordinaten der Tabelle gelten, jedoch jede Kraft $= 1$ Pfund angenommen wird?

Schwerpunkt.

Die schwierigeren der unter dieser gemeinsamen Ueberschrift aufgenommenen Aufgaben erfordern höchstens Reihensummirungen und Grenzbestimmungen bei den dabei erhaltenen Schlussausdrücken. Bei ersteren wird man mit folgenden Summenformeln ausreichen:

I. $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

II. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

III. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (n-2)^3 + (n-1)^3 = \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2$

IV. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots + (n-2)^4 + (n-1)^4$
$= \frac{1}{30}(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)$

V. $\sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin(a+\overline{n-2}\,h) + \sin(a+\overline{n-1}\,h)$
$= \frac{\sin\frac{1}{2}nh \cdot \sin[a+\frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h}$

VI. $\cos a + \cos(a+h) + \ldots + \cos(a+\overline{n-2}\,h) + \cos(a+\overline{n-1}\,h)$
$= \frac{\sin\frac{1}{2}nh\cos[a+\frac{1}{2}(n-1)h]}{\sin\frac{1}{2}h}$.

A. Schwerpunkt von Linien.

61. Es ist zu beweisen, dass der Schwerpunkt einer Geraden, Länge l, in deren Mitte liegt. Gewicht der Längeneinheit γ.

62 ([77]). Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes vom Umfange eines Dreieckes von den Seiten a, b, c? Schiefwinkliges Coordinatensystem, dessen positive X-Axe mit b, dessen positive Y-Axe mit a zusammenfällt.

63 ([78]). Wie ist die Lage des Schwerpunktes vom Umfange des gleichseitigen Dreieckes?

64. Ein regelmässiges, in einen Kreis vom Radius r eingeschriebenes Vieleck von:

4, 8 ([80]), 12 ([81]), 16, 20, 24, 28, 32, 36,

von $4n$ Seiten (n ganz, positiv) und unendlich viel Seiten (Kreis [82]), wird durch durch einen Eckpunkt gelegten Durchmesser halbirt.

Wie weit vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises liegt der Schwerpunkt jeder Umfanghälfte?

65. Ein Sehnenvieleck wird durch Einzeichnung von:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,

$2n$ und unendlich viel gleichen Sehnen (Kreis) in einen Viertelkreis (Radius r) hergestellt.

Wie gross ist die Entfernung des Schwerpunktes des Sehnencomplexes vom Mittelpunkte?

66. Man zeichnet $2n$ gleiche Sehnen in einen Kreisbogen (Radius r) ein, dessen Centriwinkel α ist. In welcher Entfernung vom Centrum liegt der Schwerpunkt der Sehnenverbindung in folgenden Beispielen:

	1.	2(84).	3.	4.	5.	6.
Radius:	r	r	r	10 mm	100 mm	1000 mm
Sehnenzahl:	$2n$	∞	∞	∞	∞	∞
Centriwinkel:	α (Bogenmaass)	α (Bogenmaass)	α (Gradmaass)	30^0	45^0	60^0?

67. Welches sind die Coordinaten des Schwerpunktes von einem Stück Umfang $ABCD$ eines ebenen Polygons? Die Coordinaten seiner Ecken sind:

	Ecke A.		Ecke B.		Ecke C.		Ecke D.	
	$x=$	$y=$	$x=$	$y=$	$x=$	$y=$	$x=$	$y=$
	Centimeter:		Centimeter:		Centimeter:		Centimeter:	
1) (85)	1	1	2	3	4	2	5	3
2)	0	0	1	2	3	2	4	2
3)	−2	1	0	3	2	2	3	3
4)	0	0	3	4	7	7	11	10
5)	1	−7	4	−3	8	0	12	3.

B. Schwerpunkt von Flächen.

68. Die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes eines Dreieckes sind aus folgenden Angaben über die rechtwinkligen Coordinaten seiner Ecken zu berechnen:

	Erste Ecke.		Zweite Ecke.		Dritte Ecke.	
	$x=$	$y=$	$x=$	$y=$	$x=$	$y=$
	Centimeter:		Centimeter:		Centimeter:	
1) (87)	2	3	4	5	7	1
2) (88)	10	1	15	25	17	13
3) (86)	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3.

69. Ein regelmässiges Sechseck, Seite a, wird durch einen durch zwei gegenüberliegende Ecken gelegten Durchmesser halbirt.

Wie weit ist der Schwerpunkt von der dem halbirenden Durchmesser gegenüberliegenden parallelen Seite a entfernt:

allgemein (89);
für $a = 10\,\text{cm}$ (90),
für $a = 8.44\,\text{cm}$ (91)?

70. Die Lage des Schwerpunktes eines halben regelmässigen, in einen Kreis vom Radius r eingeschriebenen Vielecks von:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 40, $4n$

Seiten, ist zu bestimmen. Die Halbirung des Vieleckes ist durch einen Durchmesser erfolgt, welcher durch einen Eckpunkt des Polygons geht. Der Abstand des Schwerpunktes ist von diesem Halbirungsdurchmesser aus anzugeben.

Ferner ist der Abstand des Schwerpunktes vom Halbirungsdurchmesser zu ermitteln:

beim halben Achteck von 6 cm Radius (93)
„ „ „ „ 10 cm „ (94)
„ Halbkreis vom Radius r (96).

71. In einem Kreisausschnitt (Centriwinkel α, Radius r) werden $2n$ gleiche Sehnen eingezeichnet, deren Endpunkte mit dem Mittelpunkte verbunden und so $2n$ gleichschenklige, unter einander congruente Dreiecke erhalten. Bezüglich dieses Dreieckcomplexes ist zu ermitteln:

a) der Abstand seines Schwerpunktes vom Mittelpunkte für $2n$ Seiten,
b) derselbe Abstand für $n = \infty$ (Kreisausschnitt),
c) desgl. für den Kreisausschnitt und $\alpha = 60^0$, $r = 10\,\text{cm}$ (97),
d) desgl. für den Kreisabschnitt, Winkel α, Radius r,
e) desgl. für den Kreisabschnitt, Radius 1 cm, Winkel α so gross, dass die Sehne den mittlern Radius halbirt (98).

72 (101). Eine Parabelfläche (Axe vertical, Scheitelgleichung $y = \frac{x^2}{2p}$) wird am Ende des vom Scheitel an gerechneten Stückes b der Axe durch eine Horizontale gestutzt. Der Abstand des Schwerpunktes des zwischen schneidender Horizontale und Scheitel gelegenen Stutzes vom Scheitel ist zu bestimmen, wobei mit a die zur Ordinate b gehörige Abscisse zu bezeichnen ist.

73 ([99]). Wie weit steht der Schwerpunkt einer über der grossen Axe stehenden Ellipsenhälfte $\left(\frac{a\,b\,\pi}{2}\right)$ und des Halbkreises $\left(\frac{r^2\,\pi}{2}\right)$ vom Mittelpunkte ab?

74. Wie gross ist der Abstand des Schwerpunktes einer über der kleinen Axe stehenden Ellipsenhälfte $\left(\frac{a\,b\,\pi}{2}\right)$:

allgemein ausgedrückt,
für eine grosse Halbaxe von 6 cm ([100])?

75. In welchem Abstand von der Basis liegt der Schwerpunkt des Mantels:

a) eines geraden Kegels, Höhe h,
b) desgl., Höhe 12 cm ([102]),
c) eines schiefen Kegels, Höhe h?

76. An welcher Stelle der Axe liegt der Schwerpunkt:
einer Kugelzone, Höhe h ([107]),
einer Kugelhaube, Höhe h ([106]),
einer Halbkugel vom Radius r ([103])?

77. Die Aufgabe bezieht sich im Allgemeinen auf eine ebene, auf horizontaler Basis stehende Fläche, bei welcher der höchste Punkt des Umfanges in der durch den Schwerpunkt der Fläche gezogenen Verticalen liegt (z. B. Halbkreis, auf einer Axe stehende Ellipsenhälfte). Im unteren Theile der ebenen Fläche soll eine der letzteren ähnliche Fläche derart herausgeschnitten werden,

dass die Basis des ausgeschnittenen Stückes in der Basis der Fläche liegt und dass die Schwerpunkte der vollen Fläche und des Ausschnittes mit den höchsten Umfangspunkten der vollen Fläche und des Ausschnittes in gleiche Verticale zu liegen kommen, sowie,

dass der Schwerpunkt der ausgeschnittenen Figur in die Spitze des gemachten Ausschnittes fällt.

Wie hoch liegt der Schwerpunkt der ausgeschnittenen Figur, also auch die Spitze des Ausschnittes über dessen Basis:

A. Wenn bei der anfänglichen vollen Fläche der Inhalt F, der Abstand des höchsten Umfangspunktes über der Basis h und der Abstand des Schwerpunktes von der Basis c beträgt;

B. bei einem gleichschenkligen Dreieck von der Höhe h;

C. bei einer Parabel, welche auf einer in der axialen Entfernung b vom Scheitel gezogenen Verticalen zur Axe und zwar Scheitel oben aufruht;

D. bei einer über der kleinen Axe stehenden Ellipsenhälfte; grosse Halhaxe a;

E. bei einem auf einem horizontalen Durchmesser $2R$ aufruhenden Halbkreise ([108])?

C. Schwerpunkt von Körpern.

78. In welchem Verhältniss stehen bei Cylinder, Kegel und Halbkugel von gleicher Grundfläche und Höhe die Abstände der Schwerpunkte von der Basis?

79. In welcher Entfernung von der Basis F liegt der Schwerpunkt einer parallel abgestutzten Pyramide, deren obere Fläche f ist; Abstand beider Flächen: h?

In welcher Entfernung von der Basis lag der Schwerpunkt des aus Oberägypten nach Paris transportirten Obelisken von Luxor? Derselbe hat die Form eines sehr gestreckten Pyramidenstutzes, Grundfläche Quadrat von 7.71 Fuss Seite, Oberfläche Quadrat von 4.9 Fuss Seite, Höhe des Stutzes 68.83 Fuss; der Pyramidenstutz ist oben durch eine spitzere Pyramide von 3.83 Fuss Höhe gekrönt.

Welches ist der Abstand des Schwerpunktes von der Basis bei einem geradabgestutzten Kegel, Radius der Grundfläche R, der Oberfläche r; Abstand beider: h?

80. Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche, Seite a und ein gerader Kegel, Radius der Grundfläche r, beide Körper von der Höhe h werden durch eine Ebene halbirt, welche durch die Spitze und resp. Diagonale oder einen Durchmesser der Grundfläche gelegt sind. In welcher Entfernung von der halbirenden Ebene liegt der Schwerpunkt bei beiden Körpern (Kegel [109])?

81 a. Ein gerades Prisma, Grundfläche f, Höhe h, wird durch eine auf seine obere Fläche aufgesetzte Pyramide von gleicher Grundfläche f und gleicher Höhe h zugespitzt.

b. Die Grundfläche von Prisma und Zuspitzung ist ein Rechteck von 2 cm. und 6 cm. Seite. Die Höhe des Prismas, sowie die der oben aufsitzenden pyramidalen Zuspitzung beträgt 10 cm. ([114]). Wie gross ist der Abstand des Schwerpunktes von der Basis des Prismas?

82. Zwei gerade Kreiscylinder,

ein dünnerer und längerer r, H,
ein stärkerer und kürzerer R, h

sind derart zusammengestossen, dass ihre Axen eine Gerade bilden.

1. Wie weit von der Stossfläche liegt der Schwerpunkt des Ganzen?
2. Welche Bedingungsgleichung für den Fall, dass der Schwerpunkt in die Stossfläche zu liegen kommen soll?
3. Wenn der längere 1 cm Durchmesser, 12 cm Länge
„ „ kürzere 6 cm „ 8 cm „
hat; wo liegt der Schwerpunkt des Ganzen? ([115])

83. Zwei Klötze von quadratischem Querschnitt à 1 cm. Seite stossen an ihrem Ende so zusammen, dass sie einen rechteckigen Haken bilden, dessen einer Schenkel äusserlich 6 cm., der andere 4 cm. Länge hat.

1. ([113]) Wie gross ist der Abstand des Schwerpunktes von der äusseren Grundfläche und dem äusseren Querschnitt des längeren Schenkels?
2. Wie gross, wenn die Seite des Querschnitts allgemein a, die äusseren Längen vom längeren Schenkel L und vom kürzeren Schenkel l sind?

84. ([117]) Eine gläserne Hohlkugel von 3 cm. lichtem Durchmesser ist zur Hälfte mit Quecksilber sp. G. 13,6 gefüllt. Die Kugel allein wiegt 24 g.

In welchem Abstand vom Quecksilberniveau liegt der Schwerpunkt der gefüllten Kugel?

85. Ein Cylinder aus weichem Holz, 10 cm. Höhe, 12 cm. Durchmesser soll am Boden eine concentrische Ausdrehung von 6 cm. Höhe erhalten, welche mit Blei ausgegossen wird, welches 23 Mal schwerer als weiches Holz ist.

In welchem Abstand von der Grundfläche liegt der Schwerpunkt der Verbindung bei folgenden Durchmessern des Bleieingusses:

1.	2.	3.	4.	5.
10 cm	8 cm	6 cm	4 cm	2 cm

6 ([116]). Wie gross würde der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche sein, wenn der Holzcylinder 120 cm Höhe und

12 cm Durchmesser, die Ausdrehung 6 cm Höhe, 6 cm Durchmesser, Holz das sp. G. 0,5 und Blei das sp. G. 11.4 hat?

86. Wie hoch ist bei den sechs Beispielen der Aufgabe 85 die Höhe des Bleieingusses zu nehmen, damit bei gleichbleibendem Querschnitt desselben der Schwerpunkt die tiefste Lage erhält?

7 ([119]). Der Holzcylinder habe 1 cm Radius, 10 cm Höhe, die cylindrische Ausdrehung 0,5 cm Radius. Spec. Gew. des Holzes 0.5, der Bleifüllung 11.4. Bei welcher Ausdrehungshöhe hat der Schwerpunkt die tiefste Lage?

87 ([118]). Ein gerader Kreiscylinder (Radius r, Höhe h) bestehe aus zwei Cylindern, welche eine zur Grund- und Oberfläche parallele Zusammenstossfläche haben. Der eine Theilcylinder besteht aus Material von sp. Gewicht γ, der andere aus Material von sp. Gewicht $\gamma_1 < \gamma$.

Welche Höhe muss man jedem der beiden Cylinder geben, damit der Schwerpunkt der Cylinderverbindung möglichst nahe der äusseren Basis des schwereren Cylinders zu liegen kommt?

88. Ein Körper vom Gewicht P, mittleres sp. Gew. s, ruht mit einer seiner ebenen Grundflächen auf einer Horizontalebene auf; der Schwerpunkt hat dabei den Abstand a von letzterer. Der Körper soll von der als Basis fungirenden Fläche aus eine prismatische Ausbohrung vom Querschnitt f erhalten, welche hierauf mit einem Materiale vom sp. Gewicht $S > s$ ausgefüllt wird.

Wie hoch ist die prismatische Aushöhlung zu machen, damit nach deren Ausfüllung mit dem schwereren Materiale vom sp. Gew. S, der Schwerpunkt des Ganzen die tiefste Lage habe?

Vortheilhafte Abkürzung bei der Rechnung:

$$\frac{P}{f(S-s)} = k.$$

89. Ein Körper, Inhalt C, sp. Gew s, hat unter seinen Grenzflächen zwei parallele, mit deren einer er auf horizontaler Ebene aufruht. Die Entfernung seines Schwerpunkts von der oberen horizontalen Fläche beträgt dabei b. Der Körper erhält von oben eine prismatische Aushöhlung mit perpendicularen Seitenkanten und vom Querschnitt f.

Wie tief muss die Aushöhlung gemacht werden, damit der Schwerpunkt des ausgehöhltem Körpers die tiefste Lage einnimmt?

Passende Rechnungsabkürzung $\frac{C}{f} = k$.

Kräftepaare.

Denkt man sich auf der Ebene des Paares in der Weise stehend, dass sich die Füsse in der Mitte des Hebelsarmes befinden und sieht man dabei die Drehung von links nach rechts im Sinne des Zeigers einer Uhr vor sich gehen, so ist die Richtung von den Füssen nach dem Kopfe die positive Richtung der Paaresaxe.

90 ([121]). In einer und derselben Ebene wirken vier Kräftepaare, deren Momente aus folgenden Angaben abgeleitet werden können:

Hebelsarm dcm:	2	3	4.5	3
Kraft kg:	2	2	2	4.

Wie gross ist das Moment des resultirenden Paares?

91 ([122]). Es ist das Moment des resultirenden Paares von fünf in einer Ebene wirkenden Kräftepaaren zu bestimmen, welche durch folgende Angaben bestimmt sind:

Hebelsarm dcm:	7.5	4	2	35	12
Kraft kg:	2	5	15	2	5
Drehungsrichtung:	v. l. n. r.	v. l. n. r.	v. l. n. r.	v. l. n. r.	v. r. n. l.

92 ([123]). Wie gross ist das resultirende Paar folgender neun Paare einer Ebene?

Hebelsarm cm:	5	7	7	2	4
Kraft kg:	4	5	10	2.5	5
Drehungsrichtung:	v. l. n. r.	v. l. n. r.	v. l. n. r.	v. r. n. l.	v. r. n. l.
Hebelsarm cm:	5		3	3	15
Kraft kg:	2		15	5	2
Drehungsrichtung:	v. l. n. r.		v. r. n l.	v. r. n. l.	v. r. n. l.

93 ([124]). Wie gross ist das resultirende Moment folgender fünf Paare einer und derselben Ebene?

Rechtwinklige Coordinaten des Mittelpunktes der Hebelarme:	Winkel, welchen die Hebelarme mit der positiven X-Richtung einschliessen:	Länge der Hebelarme:	Grösse jeder Kraft im Paar:	Drehungsrichtungen:
$x=10$ dcm $y=15$ dcm	10^0	3 dcm	13 kg	v. l. n. r.
3 „ 5 „	40^0	5 „	11 „	v. r. n. l.
6 „ 7 „	120^0	7 „	9 „	v. l. n. r.
-4 „ -16 „	150^0	9 „	9 „	v. l. n. r.
$+10$ „ -10 „	70^0	11 „	5 „	v. r. n. l.

94. In jedem der folgenden Beispiele sind zwei Paare gegeben, deren Axen parallel mit sich selbst an einen Punkt verlegt, rechte Winkel einschliessen würden. Wie gross sind die Momente der resultirenden Paare?

	Hebelsarm: dcm	Kraft: kg	Hebelsarm: dcm	Kraft: kg
1)	2	4	3	5
2)	4	5	3	7
3)	3	4	5	7
4)	7	4	5	9
5)	3	11	8	7.

95. Ein Paar, dessen Arm 5 dcm und bei dem jede der gleichen Kräfte 25 kg beträgt, soll in zwei gleiche Paare zerlegt werden. Die Axe jeder Paarescomponente soll in folgenden Beispielen mit der Axe des ursprünglichen Paares einen Winkel von

15^0 30^0 45^0 60^0 75^0

bilden.

Wie gross ist hiernach das Moment jeder Paarescomponente?

Kräfte, welche in verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen und deren Richtungen nicht parallel sind.

96 ([131]). An den Endpunkten einer Geraden von der Länge l wirken zwei Kräfte, von denen jede $=P$ ist und deren Richtungen mit der Geraden l spitze Winkel von 30^0 einschliessen. Verlängert man die Richtungen beider Kräfte rückwärts, so treffen sie sich unter einem Winkel von 120^0.

Wie gross ist die Resultante beider Kräfte und wie gerichtet?

97 ([132]). An den Endpunkten einer Geraden von 10 dcm Länge greifen zwei Kräfte an.

Am Endpunkte B ist die Kraft $P=30$ kg angebracht, welche in der Richtung AB an der Geraden wirkt.

Am Endpunkte A ist die Kraft $Q=40$ kg angebracht, deren Richtung mit der Richtung AB einen rechten Winkel einschliesst.

Beide Kräfte sollen ersetzt werden durch eine im Schwerpunkt der Geraden angreifende resultirende Kraft und ein resultirendes Paar.

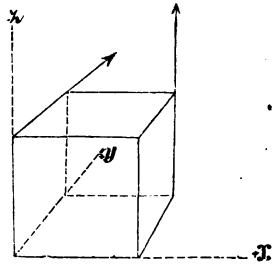
Wie gross ist Kraft und Moment des resultirenden Paares und welche Richtung schliesst erstere mit der Geraden AB ein?

98 ([136]). An jedem Endpunkte einer festen Geraden von 20 dcm Länge wirkt eine Kraft von der Grösse 100 k. Die Richtungen beider Kräfte sind in Parallelebenen enthalten, die rechtwinklig gegen die Gerade sind und würden, parallel mit sich selbst an einen Punkt verlegt, einen rechten Winkel einschliessen.

Wie gross ist die im Schwerpunkte anzubringende resultirende Kraft und das resultirende Paar, durch welche sich die gegebenen Kräfte ersetzen lassen?

99 ([138]). In zwei Ecken eines Würfels (Fig. 1) von der Seite a wirken in Richtung der angegebenen Pfeile, also in der Richtung zweier Würfelkanten ziehend, zwei Kräfte, jede $= P$.

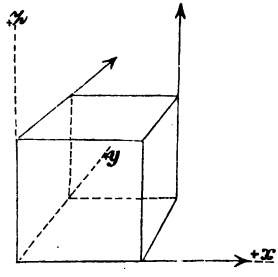
Fig. 1.



Wie gross ist die am Schwerpunkte des Würfels wirkende resultirende Kraft und das resultirende Paar, durch welche sich die gegebenen Kräfte ersetzen lassen?

100 ([139]). In drei Ecken eines Würfels, Seite a (Fig. 2), wirken in Richtung der angegebenen Pfeile drei Kräfte, von denen jede $= P$ ist und in Richtung einer Würfelkante zieht.

Fig. 2.



Wie gross ist die am Schwerpunkte des Würfels wirkende resultirende Kraft und das resultirende Paar, durch welche sich die gegebenen Kräfte ersetzen lassen?

Gleichgewicht von Körpern auf horizontalem und geneigtem Boden, sowie von aufgehangenen Körpern, Stabilität.

101. Wieviel darf die Ausladung höchstens betragen:

1. des Mittelpunktes der Oberfläche eines schiefen Kreiscylinders (Radius der Oberfläche r);
2. des Mittelpunktes der Oberfläche eines schiefen elliptischen Cylinders (Halbaxen der Grundfläche a und b);
3. der Spitze eines schiefen Kreiskegels (Radius der Grundfläche r) ([141]);
4. der Spitze eines schiefen elliptischen Kegels (Halbaxen der Grundfläche a, b);

5. des Mittelpunktes der Oberfläche eines schiefen Prismas, dessen Grundfläche ein regelmäßiges nEck ist, Seite s;
6. der Spitze einer schiefen Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges nEck, Seite s, ist,

ohne dass der auf horizontale Ebene aufgesetzte Körper nach irgend einer Seite umfällt?

Ueber die Richtung der Ausladung wird nichts Näheres bestimmt.

102. Ein mit seinem Fusse auf horizontaler Ebene ruhendes Galgengestell, zum Aufhängen leichter Körper bestimmt, besteht aus einem runden Fuss von 6 cm Durchmesser der Grundfläche und einem senkrecht in die Mitte des Fusses gesteckten Draht, der sich 32 cm über der Basis in einen Arm von 10 cm Länge rechtwinklig umbiegt. Das Gewicht des ganzen Gestelles ist bekannt und durch Versuche wird ferner das Gewicht bestimmt, welches am Ende des Armes angehangen werden muss, damit das Gestell umfällt.

Aus folgenden Angaben über die Gewichte ist zu ermitteln, wie weit der Schwerpunkt bei den Armgestellen von der Mitte des Fusses aus nach der Seite des Armes ausladet.

Gestellgewicht:	700 g	700 g	1400 g	1400 g	1400 g
Umfallgewicht:	200 g	100 g	100 g	200 g	250 g.

103. Welche Neigung darf eine ansteigende Ebene nicht überschreiten, damit folgende Körper nach dem Daraufstellen nicht umfallen, wie man auch ihre Grundfläche hierauf um die Axe des Körpers drehen mag:

a) Würfel, Seite a;
b) gerades Prisma, rechteckige Grundfläche, Seiten a, $b < a$, Höhe h;
c) gerades Prisma, Grundfläche regelmässiges nEck, Seite s;
d) Cylinder, Radius der Grundfläche r;
e) elliptischer Cylinder, Halbaxen der Grundfläche a, b;
f) Kreiskegel, Radius der Grundfläche r;
g) elliptischer Kegel, Halbaxen der Grundfläche a, b?

104. Bei einem zweirädrigen Fuhrwerk liegt bei Aufstellung auf horizontalem ebenen Boden der Schwerpunkt 100 cm hoch in der Mitte zwischen beiden Rädern, die Geleisebreite beträgt 154 cm.

Wieviel (ganze) cm tiefer darf das eine Rad höchstens stehen, als das andere, ohne dass das Fuhrwerk umfällt?

105. Welchen Abstand von der Axe muss der Schwerpunkt bei einem Cylinder von 20 cm Durchmesser überschreiten, damit der Cylinder im Stande sei, bei geeignetem Aufsetzen auf schiefe Ebenen von folgenden Neigungswinkeln nach aufwärts zu rollen?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Grad.

106. Wenn man bei einem Cylinder von 20 cm Durchmesser dem Schwerpunkt folgende Abstände von der Axe gäbe, welche Neigungswinkel dürften schiefe Ebenen nicht überschreiten, damit der auf sie in geeigneter Weise aufgesetzte Cylinder noch aufwärts rollte?

cm	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
cm	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0.

107. Ein gerader Kreiscylinder, Radius r, erhält seitlich von der Axe eine cylindrische durchgehende Ausbohrung, deren Radius:

$$0.1r \quad 0.2r \quad 0.3r \ldots\ldots 0.8r \quad 0.9r$$

beträgt, deren Axe oder Cylinderaxe parallel ist und deren Wand den Cylindermantel in einer Parallelen zur Axe berührt.

Durch die Ausbohrung rückt der Schwerpunkt von der Axe weg und der Cylinder erhält dadurch die Fähigkeit, beim geeigneten Auflegen auf eine schiefe Ebene auf letzterer aufwärts zu rollen. Wenn nun diejenige schiefe Ebene aufgesucht wird, bei welcher der Körper eben aufhört, aufwärts zu rollen und anfängt, bei der geringsten Neigungsvergrösserung abwärts zu rollen, wie sehr man auch bemüht ist, den Schwerpunkt des aufgesetzten Cylinders möglichst nach der Ansteigung der schiefen Ebene aufwärts zu legen, wie verhält sich bei einer solchen schiefen Ebene die Höhe zur Länge?

Ferner: welches ist das gesuchte Verhältniss, wenn die Ausbohrung nicht den Mantel des ursprünglichen Cylinders, sondern dessen geometrische Axe berührt und der Radius der Ausbohrung $= \frac{r}{2}$ ist?

108 (nach Lamé). Wie ist die wirkliche Bewegung des Schwerpunktes S des berganlaufenden Doppelkegels bei seinem scheinbaren Steigen auf einer schiefen Ebene beschaffen, welche Linie beschreibt dieser Punkt S und welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der Körper auf der schiefen Ebene zu steigen scheint?

Die geneigte Ebene besteht aus zwei durch ein Gewinde mit einander verbundenen metallenen Linealen, welche sich desto mehr erheben, je weiter sie sich von einander entfernen. Es ist:

2φ der Winkel, den beide Lineale oben mit einander bilden,
ψ der Winkel, welchen die Halbirungslinie des Winkels 2φ mit dem Horizonte bildet,
r der Halbmesser der gemeinschaftlichen Basis beider Kegel,
h die Höhe eines jeden derselben.

109. Folgende aus Papier ausgeschnittenen Figuren erhalten senkrecht gegen die Ebene des Papiers durchgehende Axen und nehmen hierauf, je nach der Lage ihres Schwerpunktes, ihre Gleichgewichtslage ein.

a) ([149]) Die zwischen Scheitel und Ordinate im Brennpunkt gelegene Parabelfläche ($y^2 = 2px$), Axencoordinaten: $x = \frac{1}{4}p$, $y = \frac{1}{4}p$;

b) ein Vollkreis ($x^2 + y^2 = r^2$), Axencoordinaten $x = \frac{1}{4}r$, $y = \frac{1}{4}r$;

c) eine volle Ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$, Axencoordinaten $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}a$;

d) ein Halbkreis ($x^2 + y^2 = r^2$), Axencoordinaten $x = \frac{1}{4}r$, $y = \frac{1}{4}r$, sowie $x = \frac{1}{2}r$, $y = \frac{1}{2}r$ und $\begin{matrix} x = 0.35355r \\ y = 0.35355r \end{matrix}$ ([150]).

Welchen spitzen Winkel bildet die Abscissenaxe nach der Einstellung der Fläche mit der Richtung der Schwere?

Anmerk. In folgenden Aufgaben bedeutet Stabilität eine durch den Schwerpunkt eines auf horizontaler Ebene aufruhenden Körpers gerichtete horizontale Kraft von solcher Grösse, dass die geringste Vermehrung derselben das Umfallen des Körpers zur Folge haben müsste.

110. Es ist die Stabiltät folgender Körper zu vergleichen. (Stabilität des Cylinders = 1 angenommen).

Cylinder, Kegel, Umdrehungsparaboloïd (Scheitel oben), Umdrehungsellipsoïd (eine Hälfte, auf einem axialen Schnitt stehend).

Nennt man r den Radius der Grundfläche, so ist der Inhalt des Paraboloïdes $\frac{1}{2}r^2h\pi$ und der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche $\frac{1}{3}h$.

Inhalt des Rotationsellipsoïdes $\frac{2}{3}r^2h\pi$, Abstand des Schwerpunktes von der Basis $\frac{3}{8}h$.

In welchem Verhältniss steht die Stabilität der vier Körper, wenn sie gleiche Grundfläche $r^2\pi$ und gleiche Höhe h haben?

In welchem Verhältniss steht die Stabilität der vier Körper, wenn dieselben gleiche Grundfläche und gleichen Inhalt haben?

In welchem Verhältniss steht die Stabilität der vier Körper, wenn dieselben gleiche Höhe und gleichen Inhalt haben?

111. Ein Holzcylinder von 12 cm Durchmesser und 10 cm Höhe hat theils an und für sich (1), theils nachdem vom Boden aus eine concentrische Aushöhlung gemacht und diese mit Blei ausgegossen worden ist, wenn er auf der Basis des schweren Endes steht, folgendes Gewicht und Entfernung des Schwerpunktes von der Basis, aus welchen Angaben seine Stabilität (in Kilo und nur eine Decimale) zu berechnen ist.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Gewicht, Gramm:	565	5747	3886	2284	1397	770
Entfernung des Schwerp. von der Basis, cm:	5	3.28	3.29	3.46	3.80	4.46.

	7.	8.	9.	10.	11.
Gewicht, Gramm	2280	1858	1443	958	723
Abstand des Schwerp. von der Basis, cm:	1.99	2.34	2.82	3.57	4.60.

112. Ein auf horizontaler Grundfläche aufgestellter Cylinder, Radius r, Höhe h ist aus zwei Cylindern zusammengesetzt, deren Stossfläche der Grund- und Oberfläche parallel ist und deren Axen in eine Gerade fallen; der untere schwerere Theil hat die Höhe x und das specifische Gewicht γ, der obere leichtere Theil das specifische Gewicht γ_1.

Wie gross ist die Stabilität des auf die Grundfläche des schwereren Endes aufgestellten Cylinders?

113. Ein vierrädriger Wagen mit 150 cm Geleisebreite wiegt unbeladen 100 kg, sein Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen den Rädern der rechten und der linken Seite 100 cm hoch über dem horizontalen Boden, auf welchem der Wagen aufgestellt ist; bei der Beladung mit Lasten von verschiedener Beschaffenheit, die jedesmal 100 kg in Summa betragen, liegt sein Schwerpunkt resp. 110 cm, 115 cm, 120 cm hoch.

Wie gross ist in den genannten vier Fällen seine Stabilität gegen das seitliche Umwerfen?

114. Ein Obelisk von 250000 kg Gewicht hat quadratische Grundfläche von 250 cm Seite. Der Schwerpunkt des Körpers liegt

senkrecht über der Mitte der Grundfläche in einer Höhe von 1000 cm.

Wie viel kg beträgt die Stabilität des Obelisken gegen das Umwerfen um eine Seite der Grundfläche?

115. Eine Mauer von der Höhe h und Stärke b, Länge 1 m, Gewicht der Kubikeinheit c hat eine gewisse Stabilität, die mit S_0 bezeichnet werden soll. Wenn man nun zwar bei den angegebenen Dimensionen bleibt, die Stärke b der Mauer oben beibehält, aber unten ausser der Mauerstärke b, die Mauer noch um ein Stück ausladen lässt und die äussere Mauerfläche hierauf in Form einer schiefen Ebene herstellt, so wird die Stabilität der Mauer (in der Richtung der Ausladung nach Aussen genommen) grösser werden und etwa den Werth S annehmen.

Wie gross ist das Verhältniss $\frac{S}{S_0}$ der Mauer, wenn man der Ausladung der Reihe nach die Werthe

b, $2b$, u. s. f. bis $5b$ ertheilt?

Gleichgewicht einfacher Maschinen ohne Berücksichtigung der Reibung.

A. Gruppe des Hebels.

116. Die Arme eines gewichtslos angenommenen doppelarmigen Hebels und die an dem Lastarm hängende Last ist in folgenden Beispielen gegeben.

Wie gross ist die am andern Arme zur Herbeiführung des Gleichgewichts anzubringende Kraft? Kraft und Lastrichtung sind parallel und rechtwinklig gegen die Hebelstange.

	1 (156).	2 (157).	3 (158).	4 (159).	5 (160).
Lastarm, cm:	5	2	3	1	2
Kraftarm, cm:	8	1	9	10	2
Last, Pfd:	40	50	60	70	80

117. An den Endpunkten eines gewichtslos angenommenen doppelarmigen Hebels wirken Last und Kraft parallel und rechtwinklig gegen die Hebelstange. Last, Kraft und Hebellänge ist in folgenden Beispielen gegeben. In welche Entfernung von der kleinern Kraft ist der Stützpunkt zu legen?

	1 (161).	2.	3.	4.	5.
Last, Pfund	20	15	30	18	84
Kraft, Pfund	10	5	4	4	42
Hebellänge cm	30	20	17	22	21.

118. An einem horizontal und gewichtslos angenommenen doppelarmigen Hebel wirken Last und Kraft, die Last perpendicular abwärts, die Kraft schiefabwärts nach Aussen; beide in ein und derselben Verticalebene, in welcher auch die Hebellinie liegt. Die Kraft schliesst mit dem ihr anliegenden Hebelarm einen in den folgenden Beispielen angegebenen Winkel ein; ebenso ist die Last und der Lastarm gegeben.

Wie gross ist die zur Herbeiführung des Gleichgewichts nöthige Kraft?

	1.	2.	3.	4.	5.
Last, Pfund	100	81	49	51	14
Lastarm, dcm	1	2	3	0.7	3
Kraftarm, dcm	2	9	7	1.7	7
Dessen Winkel mit der Kraft	150°	160° 31.7	162° 32.9	162° 32.9	156° 25.3.

119. An einem horizontal und gewichtslos angenommenen einarmigen Hebel wirken Last und Kraft; die Last perpendicular abwärts, die Kraft perpendicular aufwärts. Last, Lastarm, Kraftarm ist in folgenden Beispielen angegeben. Wie gross ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nothwendige Kraft?

	1.	2.	3.	4.	5.
Last, Pfund:	5	6	7	8	11
Lastarm, dcm:	2	2	8	3	4
Kraftarm, dcm:	10	3	14	4	22.

120. Ein Steinblock in Form eines geraden Prismas von rechteckigem Querschnitt hat 450 cm Höhe, 350 cm Breite und 300 cm Tiefe, Gewicht 360 Ctr. Liegt nun dieser Steinblock auf horizontalem Boden auf und er soll durch Anfassen einer senkrecht aufwärts wirkenden Kraft an einer am Boden befindlichen Kante und Umdrehung um die gegenüberliegende parallele ebenfalls am Boden befindliche Kante gehoben werden; wie viel Centner muss die hebende Kraft wenigstens betragen, je nachdem die Drehung um die Kante von 300 cm, 350 cm oder 450 cm Länge erfolgen soll?

121. Ein kleiner stehender Obelisk, 2000 kg Gewicht mit quadratischer Grundfläche von 50 cm Seite, soll um eine der Grundflächenkanten umgelegt werden. Der Schwerpunkt liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche 200 cm von der Umdrehungskante entfernt. Die Hebezeuge halten beim Umlegen an einem 400 cm von der Grundfläche entfernten Punkt der Axe und zwar rechtwinklig gegen letztere wider.

Wie gross muss die Kraft beim Widerhalten sein, während die durch Umdrehungskante und Schwerpunkt gelegte Ebene mit dem Horizonte Winkel von:

75 Gr., 60 Gr., 45 Gr., 30 Gr., 15 Gr.

bildet?

122. Bei einem Experimentirhebel vom Gewicht G und der Länge L liegt der Schwerpunkt in der Mitte zwischen beiden Enden, die Unterstützungsaxe näher dem linken Ende, in der Entfernung a von demselben. Die Gewichtshaken sind an Hülsen befestigt, die sich von den Enden aus auf die Stange aufschieben lassen; Hülse mit Gewichtshaken hat das kleine Gewicht p. Wenn links die Gewichte P_1 und P_2 aufgeschoben werden und an den Hebelsarmen l_1, l_2 wirken, rechts aber die Gewichte Q_1, Q_2 aufgeschoben werden und an den Hebelsarmen r_1, r_2 wirken;

a) welches ist die Gleichgewichtsbedingung?

b) ([162]) Wie gross ist P_1, wenn

$a = 1$ dcm $\quad L = 3$ dcm $\quad G = 1$ Pfd.
$l_1 = \frac{1}{2}$ dcm $\quad Q_1 = Q_2 = o$
$P_2 = o \quad p = o$?

c) ([163]) Wie gross ist P_2, wenn

$a = \frac{1}{3} L \quad G = 10$ Pfd.
$P_1 = 2$ Pfd. $\quad l_1 = \frac{1}{6} L \quad Q_1 = \frac{1}{2}$ Pfd. $\quad r_1 = \frac{2}{3} L$
$p = o \quad l_2 = \frac{1}{3} L$?

d) ([164]) Wie gross ist r_1, wenn

$a = 2$ dcm $\quad L = 10$ dcm $\quad G = 10$ Pfd.
$P_1 = 70$ Pfd. $\quad l_1 = 2$ dcm $\quad Q_1 = 17.5$ Pfd.
$p = 0 \quad P_2 = 0$?

123. An einer beweglichen Rolle ist ein Gewicht angehangen, was mit dem der Rolle zusammengenommen eine Last von 100 Pfd. bildet. Wenn nun die Verlängerungen des festen und beweglichen Seilendes Winkel von:

1.	2 (168).	3.	4.	5.
15^0	30^0	45^0	60^0	75^0

bilden und die Lastrichtung die Winkel halbirt, wie gross ist die am beweglichen Seilende anzubringende Kraft, die Gleichgewicht herbeiführt?

124. Bei einem Vorlesungsversuch werden die Umfänge von einem Rade an der Welle und von der Welle selbst durch Aufwickelung eines Fadens gemessen. Der Faden von der Länge l lässt sich um das Rad m Mal und um die Welle n Mal wickeln. Wie gross ist die Kraft am Radumfange anzunehmen, die der Last Q am Wellumfange das Gleichgewicht hält?

Ferner: Die Kraft beträgt 5 Pfd., ein Faden lässt sich gerade 8 Mal um das Rad, aber 40 Mal um die Welle wickeln; wie gross ist die Last? (174)

125. Folgende Beispiele beziehen sich auf ein Wellrad. Aus den gegebenen Radien von Rad und Welle, sowie der am Umfange der letzteren wirkenden gegebenen Last ist die Kraft zu berechnen, welche am Umfange des Rades zur Herstellung des Gleichgewichtes anzubringen ist.

	1 (173).	2.	3.	4.	5.
Last, Pfund:	Q	900	650	480	800
Wellradius, cm:	7	5	6	6	6
Radradius, cm:	35	100	100	80	80

B. Gruppe der schiefen Ebene.

126. In folgenden Beispielen ist eine mit einer genügend breiten Grundfläche auf eine schiefe Ebene aufgesetzte Last und der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegeben.

Wie gross ist die in Richtung der schiefen Ebene aufwärts wirkende Kraft, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes am Schwerpunkt der Last anzubringen ist?

	1 (175).	2 (176).	3 (177).	4. (178).
Last, Pfund:	10	5	260	10
Winkel der schiefen Ebene, Grad:	10	20	30	40
	5 (179).	6 (180).	7 (181).	8 (182).
Last, Pfund:	5	5	10	5
Winkel der schiefen Ebene, Grad:	50	60	70	80.

127. Wie gross ist die in Richtung der Basis einer schiefen Ebene am Schwerpunkt der Last von 10 Pfund anzubringende Kraft, welche Gleichgewicht herbeiführt, wenn die Last mit einer genügend breiten Grundfläche auf einer schiefen Ebene von

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80

Grad Neigungswinkel aufruht? (183—190).

128. Eine Last Q soll vom Herabgleiten von einer schiefen Ebene (Neigungswinkel α) durch eine Kraft verhindert werden, welche mit der normalen Druckrichtung auf die schiefe Ebene den Winkel β bildet.

Wie gross ist die Kraft im Allgemeinen und wenn $Q = 10$ Pfund, $\alpha = 10$ Grad, $\beta = 50$ Grad ist?

129. Auf jeder Seite eines gleichseitigen Keiles wirkt eine Kraft von 100 Pfund. Wie gross ist die zur Herbeiführung des Gleichgewichtes einzuführende Kraft rechtwinklig auf dem Rücken, wenn die Keilseiten eine der folgenden Neigungen gegen einander haben?

	1 (192).	2.	3.	4.	5.
Grade:	10	20	30	40	50.

130. Auf jede Seite eines gleichseitigen Keiles wirkt die Last Q. Wie gross ist die senkrecht auf den Rücken des Keiles wirkende Kraft, welche Gleichgewicht bei folgenden Dimensionen von Keilrücken und Keilseiten herbeiführt?

	1 (193).	2.	3.	4.	5.
Rücken, cm:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
jede Seite, cm:	4	4	4	4	4.

131. Der Radius der mittleren Schraubenlinie bei einer Schraube beträgt $\frac{1}{2}$ dcm. Wie gross ist die Kraft, welche einer Last von 100 Pfund bei einer der folgenden Höhen eines Schraubenganges das Gleichgewicht hält?

	1 (194).	2.	3.	4.	5.
dcm:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$.

Gleichschenklige Wage.

132. Berechnung der Empfindlichkeit einer Wage aus folgenden gegebenen Bedingungen:

Die Endschneiden (zur Anhängung der Wagschalen) und die Mittelschneide liegen in einer Ebene.

Es ist:

G das Gewicht des leeren Balkens in mg,

P die Belastung jeder Endaxe (einschliesslich des Schalengewichtes in mg),

l in mm der Abstand jeder Endaxe von der Mittelaxe,

s in mm die Tiefe des Schwerpunktes des unbelasteten Balkens unter der Mittelaxe,

z in mm die Länge der Zunge von der Mittelaxe bis zur Ablesungsscala,

p in mg, ein sehr kleines einseitiges Zulagsgewicht für die eine Schale zur Empfindlichkeitsprüfung,

σ in mm, Länge eines Scalentheiles,

n Ausschlag in Scalentheilen, welchen das Zulagsgewicht p hervorbringt.

A. Wie gross ist die Empfindlichkeit der Wage, d. h. wie gross ist n, wenn p gegeben ist?

B. Wie gross ist n oder die Empfindlichkeit der Wage bei folgenden Specialwerthen bei leerem Balken:

	1.	2.	3.	4.	5.
Balkengewicht G in kg:	6.56	2.22	0.4365	0.0865	0.01624
Armlänge l in mm:	515	328	212	138	79
Schwerpunktstiefe s in mm:	2.36	0.102	0.325	0.235	−0.054
Zungenlänge z mm:	480	347	210	160	143
Länge eines Scalentheils σ in mm:	3	2	1	1	1
$p = 10$ mg?					

133. Wie gross fällt der Ausschlag für 10 mg einseitige Belastung aus, wenn man statt der in Aufg. 132 vorangestellten Bedingungen, die Annahme macht, die Mittelschneide läge a Millimeter über der Ebene der Endschneiden und die Grösse a für die fünf in voriger Aufgabe gegebenen speciellen Beispiele die Werthe annimmt:

	1.	2.	3.	4.	5.
a in mm.	0.206	0.246	0.414	0.155	0.833?

Die Berechnung ist einmal für unbelasteten Wagebalken, ein anderes Mal für folgende, den einzelnen Beispielen angepasste Belastungen für jede Schale auszuführen.

	1.	2.	3.	4.	5.
kg:	50	5	0.5	0.05	0.005.

134. Indem die in Aufgabe 132 A resp. 133 vorangestellten allgemeinen Bezeichnungen beibehalten werden, soll

A. der Ausdruck für s angegeben werden, wenn man diese Grösse aus einer Empfindlichkeitsbeobachtung bei unbelastetem Balken, welche n liefert und aus den gemessenen Grössen z, σ, p, l, G berechnen will;

B. der Fehler Δs angegeben werden, der s anhaftet, wenn bei dem Versuche n mit dem Beobachtungsfehler Δn behaftet bleibt.

C. Bei einer Wage betrug:

die Armlänge	$l = 260$ mm
die Zungenlänge	$z = 276$ mm
Länge eines Scalentheiles	$\delta = 1.25$ mm
Balkengewicht	$G = 54400$ mg.

Durch das einseitige Zulagsgewicht $p = 10$ mg auf den leeren Balken wurde ein Ausschlag von 5.45 Scalentheilen hervorgebracht. Wie gross ist die Schwerpunktstiefe s und welcher Fehler entstand bei der Bestimmung von s, wenn man sich bei Beobachtung von n um $\frac{1}{10}$ Scalentheil versah?

135. Bei einer ungleichschenkligen Wage wiegt ein Gegenstand je nachdem er in der linken oder rechten Schale liegt:

	1 (202).	2 (203).	3 (204).	4	5
links liegend mg:	10028	12252	10000	10004	10002
rechts liegend mg:	10084	12200	10024	10000	10000.

Wie gross ist das wahre Gewicht des Gegenstandes und wie das Verhältniss des linken Wagenarmes zum rechten Arm $(10000 : x)$?

136. Durch vergleichende Wägungen auf einer feinen Wage sind die nöthigen Grundlagen zur Feststellung des Verhältnisses, resp. der nöthigen Correctionen bei folgenden Gewichtsstücken ermittelt worden:

Nominalwerth	50 g,	Bezeichnung	50′
„	20 g,	„	20′
„	20 g,	„	20″
„	10 g,	„	10′.

Letzteres Gewicht existirt in zwei genau gleichen Exemplaren.

Bei der Vergleichung selbst sind einige Milligrammstücke verwendet worden, welche als richtig angesehen wurden. Die unmittelbaren Versuchsresultate sind in folgenden Gleichungen ausgedrückt worden, bei welchen links die Gewichtsstücke genannt sind, die durch die Gewichtsstücke auf der rechten Seite im Gleichgewicht gehalten wurden.

1. Beispiel.
$$50' = 20' + 20'' + 10' + 3\text{ mg}$$
$$20' = 20'' + 2\text{ mg}$$
$$20'' = 2 \times 10' + 1\text{ mg}.$$

2. Beispiel.
$$50' = 20' + 20'' + 10' + 1\text{ mg}$$
$$20' = 20'' + 1\text{ mg}$$
$$20'' = 2 \times 10' + 1\text{ mg}.$$

3. Beispiel.
$$50' = 20' + 20'' + 10' - 1\text{ mg}$$
$$20' = 20'' + 1\text{ mg}$$
$$20'' = 2 \times 10' - 1\text{ mg}.$$

4. Beispiel.
$$50' = 20' + 20'' + 10' + 0.5\text{ mg}$$
$$20' = 20'' - 0.2\text{ mg}$$
$$20'' = 2 \times 10 - 0.1\text{ mg}.$$

5. Beispiel.
$$50' = 20' + 20'' + 10' + 0.7\text{ mg}$$
$$20' = 20''$$
$$20'' = 2 \times 10' - 0.6\text{ mg}.$$

Welches sind die Correctionen, welche dem Nominalwerth der Gewichte zuzufügen sind:

a) wenn das 50 g-Stück als richtig, d. i. = 50000 mg angenommen wird;

b) wenn eines der beiden 10 g-Stücke als richtig, d. i. = 10000 mg angenommen wird?

137. Nach dem Ergebniss vergleichender Wägungen werden an einem Gewichtssatz folgende Correctionen nothwendig:

Nominalwerth des Stückes:	Correction in mg:
50 g	+ 0.0
20′ g	+ 0.2
20″ g	− 1.8
10 g	− 1.4
5 g	− 0.95
2′ g	− 0.06
2″ g	− 0.46
1′ g	− 0.13
1″ g	− 0.13.

Die Correctionen sollen derart verändert werden, dass das Verhältniss der Gewichtswerthe dasselbe bleibt, jedoch:

a) die Correctionen sämmtlich positiv werden und dabei möglichst klein bleiben;

b) die Correctionen sämmtlich negativ werden, wobei ihr absoluter Werth möglichst klein bleiben soll;

c) die Summe der Quadrate der Correctionen ein Minimum werden.

Welche Correctionstafeln ergeben sich aus den so eben namhaft gemachten Bedingungen?

Schiefe Ebene, Keil, Schraube mit Berücksichtigung der Reibung.

138. Bei den Aufgaben über die schiefe Ebene bezieht sich jede Frage auf folgende fünf Beispiele, bei welchen ein 100 Pfund schwerer Körper mit einer genügend breiten Grundfläche auf eine schiefe Ebene gelegt, angenommen wird. In folgender Tabelle ist das Material der schiefen Ebene, das Material des Körpers und der Reibungscoëfficient der Ruhe zwischen beiden Körpern angegeben. Die bezüglichen Fragen folgen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Substanz der schiefen Ebene:	Stein	Metall	Holz	Metall	Metall, gefettet,
Substanz des Körpers:	Stein	Holz	Holz	Metall	Metall,
Reibungscoëfficient:	0.7	0.6	0.5	0.18	0.10.

A. Welchen Winkel (in ganzen Graden) muss die schiefe Ebene haben, damit der Körper bei der geringsten Vergrösserung des Winkels von selbst herabgleitet?

B. Wie gross ist die kleinste Kraft (in ganzen Pfunden), welche am Schwerpunkt des Körpers, der auf einer schiefen Ebene von 45 Grad ruht, in Richtung der schiefen Ebene aufwärts angebracht werden muss, damit das Herabgleiten verhütet wird?

C. Wie gross ist die Kraft (in ganzen Pfunden), welche am Schwerpunkt des Körpers, der auf einer schiefen Ebene von 45 Grad ruht, in Richtung der schiefen Ebene aufwärts angebracht werden muss, damit bei der geringsten Vergrösserung der Kraft Bewegung aufwärts beginnt?

D. Wie gross ist die am Schwerpunkt des Körpers anzubringende Kraft, welche in Richtung der Basis der schiefen Ebene wirkend, das Herabgleiten des Körpers verhütet?

E. Wie gross ist die Kraft, die am Schwerpunkt des auf einer schiefen Ebene von 45 Grad ruhenden Körpers angebracht werden muss und den Körper eben noch am Orte festhält, deren geringste Vergrösserung aber Aufwärtsbewegung des Körpers zur Folge hat?

F. Wie gross ist der Druck, der in horizontaler Richtung gegen den Schwerpunkt des Körpers ausgeübt werden muss, damit der Körper, welcher mit einer breiten Fläche an einer perpendicularen Wand ansteht, nicht daselbst herabgleitet?

139. Ein (gewichtslos angenommener) in Holz eingetriebener gleichseitiger Keil (die Seiten schliessen den Winkel x ein) erleidet gegen beide Seiten von der Elasticität des Holzes den gleichen Druck Q.

a) In welchem Falle bleibt der Keil im Holze stecken ([213])?

b) ([214]) Welchen Winkel darf der Keil im Holz bei einem Reibungscoëfficienten zwischen Holz- und Keilsubstanz $= 0.6$ nicht überschreiten, damit der Keil durch die Reibung noch gehalten wird?

c) Welches Verhältniss zwischen Keilrücken und Keilseiten giebt beim Reibungscoëfficient 0.6 die Grenze an, bei welcher der in Holz eingetriebene Keil gerade noch durch die Reibung festgehalten wird?

140 ([215]). Der Cylinder, welcher die mittlere Schraubenlinie einer flachgängigen Schraube enthält, hat den Radius r, Druck in Richtung der Spindelaxe abwärts sei Q, Höhe eines Schraubenganges h, Reibungscoëfficient f.

Wie gross muss die am Umfange der Schraubenspindel anzubringende Kraft wenigstens sein, damit das Herabgleiten der Spindel infolge des eignen Gewichtes verhütet wird?

141 ([216]). Welchen Werth muss das Verhältniss $\frac{h}{r}$ der Höhe eines Schraubenganges zum Radius der mittleren Schraubenlinie überschreiten, wenn die Spindel der Schraube durch ihr eigenes Gewicht in der Mutter herablaufen soll?

Ferner: Welchen Werth wird das gesuchte Verhältniss für Holzschrauben annehmen, für welches der Reibungscoëfficient 0.5 und für Metallschrauben, für welches der Reibungscoëfficient 0.18 angenommen wird?

Elasticität und Festigkeit.

Anmerk. Bei den Aufgaben über absolute Elasticität wird unter dem Elasticitätsmodulus E das Gewicht (in Kilogramm) verstanden, welches einen Draht von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge um 1 m ausdehnen würde, wenn der Draht bei so bedeutenden Ausdehnungen noch vollkommen elastisch bliebe.

142. Wie gross ist das Gewicht, welches an einem Draht von 1 mm Durchmesser und 1 m Länge in Richtung der Länge wirken muss, um eine Verlängerung des Drahtes um 1 mm hervorzubringen?

Der Werth von E ist (nach Wertheim) in kg:

1.	2.	3.	4.	5.
angelassener Kupferdraht	angelassener Platindraht	angelassener Eisendraht	angel. engl. Stahldraht	angelassener Gussstahldraht
10519	15518	20794	17278	19561

143. Nach Wertheims Versuchen zerreisst ein Draht von 1 mm Durchmesser bei langsamer Belastung bei folgenden Gewichten (kg):

1.	2.	3.	4.
angelassener Kupferdraht	angelassener Eisendraht	angelassener Gussstahldraht	angelassener Stahldraht.
30.54	46.88	65.75	40.00.

Behufs eines Versuches, bei welchem ein grosses Gewicht von 100 kg an einen Draht von 10 m Länge angehangen werden soll, wird gefragt:

Wie viel mm Durchmesser muss der Draht haben, wenn er erst bei dem 10fachen des Pendelgewichtes, d. i. bei 1000 kg reissen soll, und wieviel mm Dehnung erleidet der Draht durch das ihm angehangene Gewicht von 100 kg? Als Elasticitätscoëfficienten sind die in voriger Aufgabe angegebenen zu verwenden.

144. Aus den in Aufgabe 142 angegebenen Elasticitätscoëfficienten (1, 3, 5, 4) für Kupfer, Eisen, Gussstahl und Stahl ist zu berechnen:

a) die Längenausdehnung in mm von einem Draht von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge, welche ein in Richtung der Länge ziehend wirkendes Gewicht von 10 kg hervorbringt;

b) die Volumsvermehrung in cbmm, welche bei demselben Gewicht und demselben Drahte eintritt, wenn die (aller-

dings nicht für alle Substanzen geltende) Annahme gemacht wird, dass, wenn die Längeneinheit durch irgend ein Gewicht auf die Länge $1+\delta$ ausgezogen wird, jeder Querschnitts-Durchmesser von der Länge 1 auf die Länge $1-\frac{1}{3}\delta$ gebracht werde.

145. Bei einer Schickert'schen Wage wurde durch Versuche gefunden (Hartig, Polyt. Centralbl. 1859 S. 1042 ff.):

Höhe der Mittelaxe über der Ebene der Endaxen bei unbelastetem Balken:

$$a = 0.05735 \text{ mm.}$$

Biegung des Balkens für ein mg-Belastung

$$b = 0.000\ 000'02806 \text{ mm.}$$

Wie gross ist:

1) die Höhe der Mittelaxe über der Ebene der Endaxen bei angehangenen leeren Wagschalen, ferner:

2) bei grösster Belastung der Endaxen?

Gewicht einer Wagschale nebst Gehänge 147820 mg

Stärkste Belastung jeder Endaxe 1'251076 mg.

146 ([230]). Ein Holzbalken von rechteckigem Querschnitt ist an dem einen Ende eingemauert, so dass die Längsrichtung horizontal, zwei Seitenflächen horizontal und zwei vertical sind. Die Länge des freien Endes ist l, die Breite (horizontal b), die Höhe (vertical h). Wie in der Mechanik nachgewiesen wird, ist das Gewicht, welches der Balken am freien Ende noch zu tragen vermag, ohne zu brechen

$$P = R\,\frac{b\,h^2}{l},$$

wobei R eine von der Festigkeit des Holzes abhängige und durch Versuche zu bestimmende Constante ist.

Wenn nun aus einem Holzbalken von cylindrischem Querschnitt, Durchmesser d, ein Balken von rechteckigem Querschnitt von gleicher Länge gezimmert werden soll, dessen Tragfähigkeit für Belastung am freien Ende ein Maximum sein soll; welche Breite und Höhe muss dieser Balken besitzen?

Gleichförmige Bewegung.

147. Ein Fussgänger, der durchschnittlich $1\frac{1}{2}$ Meter in der Sekunde geht, geht um 8 Uhr vom Anfang einer Landstrasse aus auf derselben fort. Er wird von einem Wagen 8 Uhr 24 Minuten

eingeholt, welcher vom Anfang der Strasse um 8 Uhr 15 Minuten abfuhr.

Wie gross ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des Wagens?

148. Ein Fussgänger, der durchschnittlich $1\frac{1}{2}$ Meter in der Sekunde geht, geht in demselben Momente von dem einen Ende einer geraden Strecke einer Eisenbahn ab, in welchem vom andern Ende der Strecke aus ihm entgegen eine Locomotive abfährt. Die Locomotive fährt an ihm vorüber, nachdem er gerade den 17. Theil der Strecke zurückgelegt hat.

Wie gross ist die durchschnittliche Geschwindigkeit der Locomotive gewesen?

149. Die Bewegung zweier Körper A und A_1 findet auf einer geradlinigen Strecke $aa_1 = d$ statt.

A bewegt sich von a in Richtung aa_1 und geht zur Zeit t ab;
A_1 bewegt sich von a_1 in Richtung a_1a und geht zur Zeit t_1 ab;
Beide treffen sich zur Zeit T.

1) Wie gross ist die Geschwindigkeit c_1, wenn t, t_1, T, c, d gegeben ist?
2) Wie gross sind die Geschwindigkeiten c und c_1, wenn t, t_1, T, d und die Entfernung e von a, in welcher sich beide Körper treffen, gegeben ist?

150. Ein Körper macht in den nachfolgend angegebenen Zeiten die darunter angeführte Zahl Umdrehungen. Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers pro Sekunde?

	1 (237).	2 (238).	3.	4.	5.
Zeit, Sekunden:	5	20	1	10	t
Umdrehungszahl:	100	210	1	1	n.

151. Die Winkelgeschwindigkeit eines rotirenden Körpers ist 1, 5, 10, $15m$, allgemein ξ Meter.

Wieviel Umdrehungen macht der Körper in einer Minute?

152. Zwei Punkte rotiren auf einem und demselben Kreisbogen in gleichem Sinne; der eine mit der Winkelgeschwindigkeit ξ, der andere mit der grösseren Winkelgeschwindigkeit ξ_1.

Welche Zeit verfliesst zwischen einem Zusammentreffen der Punkte und deren nächsten Zusammentreffen?

Ferner: Welche Zeit verfliesst, wenn statt der Angabe der Winkelgeschwindigkeit die Angabe zu Grunde liegt, dass der erste Punkt in t Sekunden m, der zweite in t Sekunden n Umläufe macht, $n > m$?

Wie gross ist die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten, wenn die zwischen zwei Coincidenzen verfliessende Zeit $= T$ gefunden wurde?

153. Zwei Punkte rotiren auf derselben Kreisperipherie mit den Winkelgeschwindigkeiten ξ und $\xi_1 > \xi$ in entgegengesetztem Sinne; oder in der Zeit t, während der langsamere m Umläufe macht, macht der schnellere deren n.

Wie gross ist die zwischen zwei auf einander folgenden Coincidenzen verfliessende Zeit, und wenn diese durch Beobachtung $= T'$ gefunden wurde, wie gross die Summe der Winkelgeschwindigkeiten?

154. Zwei mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit um horizontale Axen rotirende Scheiben werden dicht neben einander gestellt: das eine Mal so, dass die Rotation in gleichem, das andere Mal so, dass die Rotation in entgegengesetztem Sinne erfolgt.

In beiden Fällen wird die zwischen zwei auf einander folgenden Coincidenzen verfliessende Zeit beobachtet und für Rotation in gleichem Sinne T, für Rotation in entgegengesetztem Sinne T' gefunden.

Wie gross ist die Winkelgeschwindigheit ξ_1 der schneller und die Winkelgeschwindigkeit ξ der langsamer rotirenden Scheibe?

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

155. Wie gross ist nach 1, 2, 3 .....9, 10 ganzen Sekunden der frei durchfallene Raum und die dabei erlangte Endgeschwindigkeit (eine Decimale)? Fürs mittlere Deutschland $g = 9.81$ m.

156. In wieviel Sekunden durchfällt ein Körper nach den Gesetzen des freien Falles einen Schacht von 100 m, 200 m, 300 m, 400 m, 500 m, 600 m Tiefe, und mit welcher Endgeschwindigkeit kommt er am Boden des Schachtes an? $g = 9.81$ m.

157. Welche Räume muss ein Körper durchfallen, damit die Endgeschwindigkeit 100 m, 200 m, 300 m, 400 m, 500 m werde? $g = 9.81$ m.

158. Welche Werthe von g (in m, eine Decimale) liegen folgenden Angaben zu Grunde?

Ein Körper durchfällt frei 100 Pariser Fuss = 32.484 m
auf der Erde in 2.57 Sekunden,
„ dem Monde in 6.27 Sekunden,
„ dem Jupiter in 1.57 Sekunden.

Wurfbewegung im luftleeren Raume.

159. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c senkrecht aufwärts geworfen.

1. Nach welcher Zeit hat der Körper den Abstand y vom Ausgangspunkte erreicht und mit welcher Geschwindigkeit (v) passirt er denselben? Beschleunigung der Schwere g.
2. Nach welcher Zeit t und in welchem Abstand vom Ausgangsorte erreicht der Körper eine gegebene Geschwindigkeit v?

160. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c senkrecht aufwärts geworfen; t_1 Sekunden später wird ein zweiter Körper an derselben Stelle und mit derselben Geschwindigkeit c in die Höhe geworfen.

Nach welcher Zeit vom Bewegungsanfang des ersten Körpers treffen sich beide?

161. Aus einem Geschütz wird eine Granate mit der Geschwindigkeit $333\frac{1}{3}$ m senkrecht nach oben geschossen.

In welchem Abstande vom Ausgangsorte befindet sich das Spitzgeschoss, und welche Geschwindigkeit hat dasselbe nach 0.1, 0.2 u. s. f. bis 0.9, 1.0 der gesammten Flugzeit, d. i. der Zeit, welche das Geschoss braucht, um die ganze Flugbahn bis wieder zurück zum Ausgangsorte zu durchlaufen? (Zeitsekunden sind bis auf ein Zehntel, Entfernungen nur in ganzen Metern anzugeben).

162. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c senkrecht aufwärts geworfen; aus dem Gipfel, den dessen Flugbahn erreichen wird, wird gleichzeitig mit dem Abgange des vorigen ein Körper, und zwar mit der Geschwindigkeit c senkrecht abwärts geworfen.

In welchem Abstande vom Ausgangsort des aufwärts geworfenen Körpers und mit welcher Geschwindigkeit treffen sich beide Körper?

163. Ein Körper fällt frei herab, t_1 Sekunden nach seinem Abgange wird ein anderer von demselben Abgangsorte senkrecht abwärts mit der Geschwindigkeit c geworfen.

Nach welcher Zeit vom Abgange des freifallenden Körpers an gerechnet, in welchem Abstande vom gemeinschaftlichen Ausgangsorte und mit welcher Geschwindigkeit treffen sich beide?

164. Die Anfangsgeschwindigkeit von $333\frac{1}{3}$ m eines emporgeschossenen Körpers bildet mit dem Horizonte folgende Winkel:

15^0 30^0 45^0 60^0 75^0 90^0.

Wie viel ganze Meter beträgt in den genannten Fällen die horizontale Wurfweite und die Scheitelhöhe des Körpers, sowie wie viel ganze und Zehntel-Sekunden die Flugzeit bis zum Wiedereintreffen in der Horizontalebene des Ausgangspunktes?

165. Angenommen, es sei aus der Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers und aus dem Winkel, welchen dieselbe mit dem Horizonte bildet, die gesammte horizontale Wurfweite ω und die Scheitelhöhe h der Trajectorie berechnet worden und soll hierauf die letztere gezeichnet werden, so wird gefragt:

Wenn man eine beliebige horizontale Abscisse (Coordinatenanfang der Ausgangsort des Geschosses) $= \nu . \omega$ setzt (ν ein positiver Bruch), welches ist dann die zugehörige Ordinate (in der Scheitelhöhe h ausgedrückt) und welche Ordinaten correspondiren den Abscissen:

$$\tfrac{1}{10}\omega, \quad \tfrac{2}{10}\omega \text{ u. s. f. bis } 0.9\omega \text{ und } 1.0\omega.$$

166 ([273]). Von einem Punkte einer Horizontalebene soll ein Körper mit der Geschwindigkeit c schief aufwärts geworfen werden. Der Elevationswinkel ε des Wurfes ist so zu wählen, dass durch den Wurf ein Punkt getroffen wird, dessen Horizontalprojection vom Ausgangsorte der Bewegung die Entfernung α hat und welcher in der Höhe β über der Horizontalebene liegt:

1. Durch welchen Ausdruck für $tg\,\varepsilon$ ist ε bestimmt?
2. In welchem Falle liefert der Ausdruck für $tg\,\varepsilon$ mögliche Werthe?
3. In welchem Falle giebt der Ausdruck für $tg\,\varepsilon$ nur einen Werth?
4. In welchem Falle giebt der Ausdruck für $tg\,\varepsilon$ unmögliche Werthe?

167. Wenn die Bedingungen der Aufgabe wie in 166 sind, aber ε als gegeben angesehen wird.

Wie gross ist c zu machen?

Masse, Dichtigkeit, bewegende Kraft, Beschleunigung.

Das absolute Gewicht K eines Körpers in Kilogramm, die Masse M desselben und die Beschleunigung der Schwere $g = 98.1$ dcm (Mittelwerth für Deutschland) sind durch die Beziehung verbunden $K = Mg$. Die Dichtigkeit oder die Masse der Kubikeinheit ist bei den Aufgaben in der Regel, wie oben, auf das Decimeter und Kilogramm als Einheiten bezogen worden.

168. Wie gross ist die Masse eines Körpers vom absoluten Gewicht: 100, 200 kg etc. bis 900, 1000 kg.?

169. Wie gross ist die Dichtigkeit folgender Substanzen, wenn für deren specifisches Gewicht folgende Rechnungswerthe angenommen werden:

Wasser:	gehämm. Blei:	Gusseisen:	gewöhnl. Glas:	Bronce:
1.000	11.388	7.6	2.675	8.838
	raffin.	gegoss.	weiches	gehämm.
Kork:	Kupfer:	Neusilber:	Holz:	Zinn:
0.240	8.721	8.517	0.500	7.600

170. Wenn man statt der Eingangs angenommenen Einheiten, dcm und kg folgende annehme:

m und 100 kg, cm und g, mm und mg;

mit welchen Zahlen müsste man die nach dcm und kg berechneten Massen und Dichtigkeiten multipliciren, um sie in den neu angenommenen Einheiten ausgedrückt zu erhalten?

Ferner, mit welchen Zahlen ist das specifische Gewicht eines Körpers zu multipliciren, um die Dichtigkeit eines Körpers zu erhalten, je nachdem man von einer der oben genannten vier Einheiten ausgeht?

171. In folgenden Beispielen ist die bewegende Kraft zu berechnen. Gegeben sind zur Berechnung: der Inhalt des Körpers, die Dichtigkeit desselben und die constante Beschleunigung der Bewegung.

	1.	2.	3.	4.	5.
Inhalt cbdcm:	1	10	2	5	4
Dichtigkeit:	0.01	0.02	0.04	0.06	0.10
Beschleunigung dcm:	10	20	20	30	40.

172. Wenn die Beschleunigung der Schwere auf der Erde im Mittel = 9.8 m, auf dem Monde = 1.7 m, auf dem Jupiter = 26.3 m angenommen wird; wie viel Kilogramm Druck übt die

Anziehungskraft des Mondes, resp. des Jupiters auf eine an deren Oberfläche befindliche Masse aus, welche auf der Erde 1 Kilogramm wiegen würde?

173. Wie viel Decimeter beträgt die Beschleunigung in folgenden Beispielen, bei welchen die bewegende Kraft und die bewegte Masse gegeben ist?

	1.	2.	3.	4.	5.
Kraft:	100 kg	200 kg	400 kg	500 kg	1000 kg
Masse:	1	2	4	10	20.

174. Ein Körper von 10 cbdcm Inhalt erhält durch eine Kraft 4.905 m Beschleunigung. Wie gross ist die bewegende Kraft, je nachdem der bewegte Körper das specifische Gewicht von weichem Holz = 0.5 oder von Blei = 11.4 hatte?

175. Ein Körper von 10 cbdcm Inhalt wird durch die Kraft von 10 kg mit 49.05 dcm Beschleunigung bewegt; wie gross ist die Dichtigkeit und wie gross das specifische Gewicht des Körpers?

Fall der Körper auf schiefen Ebenen und bei der Atwood'schen Fallmaschine ohne Berücksichtigung der Reibung.

176. Eine verstellbare schiefe Ebene von 50 cm Länge erhält durch ein Stellholz der Reihe nach die Höhen 1 cm, 2 cm u. s. f. bis 10 cm.

Wenn ein Körper von 5 kg Gewicht auf die schiefe Ebene gelegt wird, wie gross ist in jedem der angenommenen Fälle die bewegende Kraft (in Gramm ausgedrückt) und die Beschleunigung beim Herabgleiten in Centimetern?

177. Wie muss sich die Höhe zur Länge einer schiefen Ebene verhalten, wenn der Fallraum eines auf derselben herabgleitenden Körpers in der 1. Sekunde 1 cm, 5 cm oder 10 cm betragen soll?

178. Die im Jahre 1816 zum Transport von Holz vom Pilatusberge erbaute schiefe Ebene hatte bei einer durchschnittlichen Neigung von 14 Grad gegen den Horizont ca. 12000 m Länge.

Wie viel (ganze) Sekunden würde hiernach, von der Reibung abgesehen, ein Baumstamm beim Herabgleiten auf der ganzen Strecke gebraucht haben?

179. Die hauptsächlichsten Steigungen bei der Rigibahn sind 1 : 18 und 1 : 4, bei der Bahn auf dem Mount Washington bei Philadelphia 1 : 3.

Welche Beschleunigungen in (ganzen) cm würden einem auf diesen Bahnen frei herablaufenden Wagen und zwar speciell bei den genannten Steigungen in Folge der Schwere allein ertheilt werden?

180. An den Enden der (gewichtslosen) Schnur, welche über die feste (gewichtslose) Rolle der Atwood'schen Fallmaschine geschlungen ist, ziehen im Gleichgewichtszustande zwei Gewichte jedes = 250 g.

Wieviel cm muss (abgesehen von der Reibung) der an der Scala beobachtete Fallraum der 1. Sekunde ausfallen, sobald das einseitige Zulaggewicht 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g beträgt?

181. Bei einer Atwood'schen Fallmaschine, bei welcher in Folge von deren Construction weder auf das Gewicht der Schnur, noch auf die Kraft zur Bewegung der Rolle Rücksicht genommen zu werden braucht, soll das Verhältniss des kleinen einseitigen Zulaggewichtes p zu einem der beiden gleichen Gewichte P berechnet werden (als gemeiner Bruch), welches vorhanden sein muss, damit der Fallraum der ersten Sekunde 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, 5.0 cm werde.

Bewegung bei Gegenwart von Reibungswiderständen.

182. Ein Körper von 1 kg Gewicht, welcher mit einer genügend breiten Grundfläche auf eine horizontale Bahn aufgesetzt und dann in eine beliebige Geschwindigkeit versetzt worden ist, soll durch eine am Schwerpunkt angebrachte, in der Bewegungsrichtung wirkende Kraft in der ihm ertheilten Geschwindigkeit erhalten werden.

Wieviel Gramm muss die Zusatzkraft betragen, wenn folgende Reibungscoëfficienten der Bewegung beim Gleiten des Körpers auf seiner Bahn angenommen werden?

Holz auf Holz trocken:	0.36
„ „ „ mit Wasser benetzt:	0.25
„ „ „ mit Schweineschmalz:	0.07
Metall auf Metall trocken:	0.18
Metall auf Metall mit Schweineschmalz:	0.09
Holz auf Metall trocken:	0.42.

183. Wenn ein Körper von 1000 g Gewicht mit einer breiten Berührungsfläche auf eine schiefe Ebene von 60^0 Neigung gelegt wird, auf der er herabgleitet; wie viel Gramm beträgt die während der Bewegung auf ihn wirkende Kraft, wenn die Reibung zwischen

den Substanzen stattfindet, deren Reibungscoëfficienten am Ende voriger Aufgabe genannt worden sind?

184. Wenn die Reibungscoëfficienten zu Grunde gelegt werden, die am Schlusse der Aufgabe 182 aufgeführt worden sind, wie gross sind die Neigungswinkel von schiefen Ebenen zu machen, wenn beim Herabgleiten von Körpern auf denselben die Beschleunigung der Schwere $\frac{1}{1000}$ der Beschleunigung beim freien Falle werden soll?

185. Von der in Aufgabe 178 besprochenen schiefen Ebene zum Holztransport vom Pilatus von 14^0 durchschnittlicher Neigung und 12000 m Länge wird angegeben, dass die herabgleitenden Baumstämme in $2\frac{1}{2}$ Minute die ganze Bahn durchlaufen hätten.

Wie gross ist hiernach der Reibungscoëfficient im Mittel zu rechnen?

186. Bei einer Atwood'schen Fallmaschine ist jedes der beiden gleichen Gewichte 250 g schwer. Bei einer Versuchsreihe, wobei von einem zum andern Versuch die Reibung an der festen Rolle immer wirksamer beseitigt wurde, brachten folgende Zulagsgewichte den Fallraum von 1 cm pro 1 Sekunde hervor.

Wie viel mgr des einseitigen Zulagsgewichtes wurde bei jedem Versuche durch die Reibung *pp* absorbirt?

	1.	2.	3.	4.	5.
Zulagsgewicht *g*:	3.000	2.750	2.660	2.000	1.698.

187. Ein Steinblock von 1080 Pfund wurde im Steinbruch auf einen Breterschlitten gelegt und dieser auf Holzbahn mit 606 Pfund Kraft bewegt, nach dem Bestreichen der Bretflächen mit Seife betrug die Reibung nur 182 Pfund; als man nun den Steinblock auf Walzen von 3″ Durchmesser legte, betrug die Zugkraft 28 Pfund.

Wie gross war in jedem der genannten Fälle der Reibungscoëfficient?

188. Ein auf Schienen und horizontaler Bahn gehender Wagen wird in 20 m Geschwindigkeit versetzt und dann sich selbst überlassen. Wie viel Meter durchläuft der Wagen hierauf noch, wenn die Reibung zu 0.006 des Wagengewichtes angenommen wird?

189 (300). Eine schiefe Ebene von der Höhe *h*, Basis *b* und Länge *l* wird benutzt, um einen Körper darauf herabgleiten zu lassen.

Wie gross ist die Endgeschwindigkeit des Körpers:

a) wenn die Höhe h der schiefen Ebene frei durchfallen würde;

b) nach dem Herabgleiten auf der Länge l der schiefen Ebene vermöge des eigenen Gewichts, aber ohne Reibung;

c) nach dem Herabgleiten auf der Länge der schiefen Ebene mit Reibung (Coëfficient derselben φ).

Wie viel Sekunden beträgt ferner die Fallzeit in den unter a, b, c genannten Fällen? ([302])

Trägheitsmomente.

In nachfolgenden Aufgaben sind die Hauptträgheitsmomente in Bezug auf die gegebenen Hauptaxen der Trägheit X, Y, Z zu bestimmen. Eine jede dieser gegebenen Axen ist rechtwinklig auf der Ebene der beiden anderen Axen und die drei Axen bilden zusammengenommen ein rechtwinkliges Raumcoordinatensystem, dessen Anfang mit dem Schwerpunkt der Körper zusammenfällt. Die Trägheitsmomente, je nachdem sie auf die gegebene Axe X, Y oder Z sich beziehen, werden nachfolgend resp. mit A, B, C bezeichnet werden. Die durch die nachfolgenden Aufgaben geforderte Berechnung der Trägheitsmomente lässt sich durchweg elementar ausführen, wobei die am Anfang des Capitels, Schwerpunkt, eingefügte kleine Formelsammlung nützlich sein wird.

Bei den Aufgaben, in denen verlangt wird, das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine Gerade zu berechnen, welche mit den Hauptaxen X, Y, Z resp. die Winkel α, β, γ bildet, gilt der Ausdruck für T:

$$T = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

A. Trägheitsmomente von Linien.

190. 1) Es sind die Hauptträgheitsmomente für eine gerade Linie von der Länge l und Dichtigkeit γ der Längeneinheit zu berechnen. Es wird angenommen, die Linie falle mit der X-Richtung des rechtwinkligen Raumcoordinatensystems und zwar ihr Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfang zusammen.

2) ([306]) Wie gross ist das Trägheitsmoment der geraden Linie in Bezug auf eine durch den einen Endpunkt der Geraden gehende, gegen letztere rechtwinklige Axe?

3) ([307]) Wie gross ist das Trägheitsmoment der geraden Linie in Bezug auf eine Axe, welche gegen die Gerade rechtwinklig

ist, dieselbe aber nicht schneidet; die Linie kürzester Entfernung zwischen Axe und Gerade trifft letztere im Mittelpunkt und hat die Länge d.

191. 1) Es sind die Hauptträgheitsmomente des Umfanges eines Quadrates von der Seite a und der Dichtigkeit γ der Längeneinheit zu bestimmen. Die Hauptaxen X, Y sind zwei auf einander rechtwinkligen Seiten des Umfanges parallel, die Axe Z steht senkrecht auf der Ebene des Quadrates.

2) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Seite des Quadrates als Axe?

3) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Diagonale des Quadrates?

192. 1) Es sind die Hauptträgheitsmomente eines Rechteckes, dessen Seiten a, b sind und bei welchem die Dichtigkeit der Längeneinheit γ ist, zu bestimmen. Die Hauptaxe X ist $\| a$, die Hauptaxe Y ist $\| b$, die Hauptaxe Z rechtwinklig auf der Ebene des Rechteckes.

2) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Diagonale des Rechteckes?

3) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch die Mittelpunkte zweier ungleicher Umfangsseiten gelegte Axe?

193. 1) Es sind die Hauptträgheitsmomente eines Kreisumfanges vom Radius r zu bestimmen. Die Hauptaxen X und Y sind zwei beliebige einander im Mittelpunkte rechtwinklig schneidende Durchmesser, die Z-Axe steht rechtwinklig auf der Ebene des Kreises. Die Dichtigkeit der Längeneinheit des Umfanges ist γ.

2) ([311]) Wie gross ist das Trägheitsmoment der Kreisperipherie in Bezug auf eine gegen die Kreisebene senkrechte Axe, welche durch einen Punkt der Peripherie geht?

3) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Axe, welche mit der Kreisebene einen Winkel von 45^0 einschliesst?

B. Trägheitsmomente von Flächen.

194. 1) Wie gross sind die Hauptträgheitsmomente eines Quadrates von der Seite a und Dichtigkeit γ der Flächeneinheit? Die Hauptaxen X und Y liegen in der Fläche und sind den Seiten parallel, die Axe Z ist rechtwinklig auf der Fläche.

2) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Diagonale?

3) ([313]) Wie gross ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch einen Eckpunkt des Quadrates gehende Axe, welche mit den anliegenden Seiten des Quadrates die Winkel α, β bildet?

195. 1) Wie gross sind die Hauptträgheitsmomente eines Rechteckes, welches die Seiten a, b und die Dichtigkeit γ der Flächeneinheit besitzt? Die Hauptaxe X liegt parallel zu a in der Fläche, die Hauptaxe Y parallel zu b, die Z-Axe steht rechtwinklig auf der Fläche.

2) Wie gross ist das Trägheitsmoment bezüglich einer Diagonale des Rechteckes?

196. 1) Wie gross sind die Hauptträgheitsmomente einer Kreisfläche, Radius r und Dichtigkeit der Flächeneinheit γ? X- und Y-Axe sind zwei in der Fläche liegende, sich im Mittelpunkt rechtwinklig schneidende Durchmesser; Z steht rechtwinklig auf der Fläche.

C. Trägheitsmomente von Körpern.

197. 1) Es sind die Hauptträgheitsmomente eines rechtwinkligen Parallelepipedes von den Seiten a, b, c und der Dichtigkeit γ der Kubikeinheit zu bestimmen. Die Hauptaxen X, Y, Z sind resp. den Seiten a, b, c parallel zu nehmen.

2) Es ist das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes in Bezug auf die Hauptdiagonale zu bestimmen.

3) Es ist das Trägheitsmoment eines Würfels in Bezug auf eine beliebige durch dessen Schwerpunkt gelegte Axe zu bestimmen.

198. Die Hauptträgheitsaxen eines Cylinders von der Höhe h, Radius der Grundfläche r, Dichtigkeit der körperlichen Einheit γ, sind zwei beliebige den Grundflächen parallele, sich unter einander rechtwinklig im Schwerpunkt schneidende Gerade (X, Y), die Z-Axe fällt mit der geometrischen Axe des Cylinders zusammen. Die Hauptträgheitsmomente des Cylinders, welche auch elementar aus denen des Kreisringes und der Kreisfläche abgeleitet werden können, sind:

$$A = r^2 \pi h \gamma \left[\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right] = B,$$

$$C = r^2 \pi h \gamma . \frac{r^2}{2}.$$

1) Man denke sich zwei parallele Durchmesser, einen in der Grund-, einen in der Oberfläche. Verbindet man nun die entgegengesetzt liegenden Enden der Durchmesser, so soll die dadurch

erhaltene, durch den Schwerpunkt gehende Diagonale als Axe angesehen werden, bezüglich welcher das Trägheitsmoment zu berechnen ist.

2) Wie gross muss die Höhe des Cylinders vom Radius r sein, damit der Cylinder die Eigenschaft erlange, dass sein Trägheitsmoment bezüglich jeder beliebigen durch den Schwerpunkt gelegten Axe gleichen Werth habe?

199. Das Trägheitsmoment einer Kugel in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser ist bei der Dichtigkeit γ:

$$\tfrac{4}{3} r^3 \pi\gamma \,.\, \tfrac{2}{5} r^2 = \tfrac{1}{6} d^3 \pi\gamma \,.\, \tfrac{1}{10} d^2.$$

Wenn nun eine Kugel vom Durchmesser d an einem dünnen Faden von der Länge l und Dichtigkeit n der Längeneinheit aufgehangen ist, der Faden nur bis zur Peripherie der Kugel gerechnet; wie gross ist das Trägheitsmoment des Ganzen bezüglich des Aufhängungspunktes?

200 ([321]). Ein Cylinder von Holz, sp. G. 0.5 und ein Cylinder von Blei, sp. G. 11.4 sollen gleiches Trägheitsmoment bezüglich ihrer geometrischen Axe, dabei zugleich gleiche Höhe besitzen. Wie viel mal grösser muss der Durchmesser des hölzernen Cylinders als der des bleiernen sein?

Constante Kräfte an einem Körper mit einer festen Axe.

201. Eine Kugel und ein Cylinder haben beide ein gleiches Gewicht von 10 kg und beide denselben Durchmesser von 2 dcm. Die Kugel hat eine feste Axe, welche sie central in Richtung eines Durchmessers durchdringt; der Cylinder kann sich um seine geometrische Axe, die als feste Axe fungirt, drehen. Bei der Kugel wirkt am Aequator, beim Cylinder am Umfange eine constante Kraft von 4.8 kg, welche stets tangential wirkt und in einer gegen die feste Axe rechtwinkligen Ebene bleibt.

Wie viel dcm Winkelbeschleunigung erlangen Kugel und Cylinder durch die Kraft?

Wenn aber Kugel und Cylinder unter den früheren Verhältnissen 96 kg wiegen und 2 dcm Radius haben; wie gross ist dann die durch die Kraft erzeugte Winkelbeschleunigung?

202. Am Umfange einer cylindrischen mit fester Axe (= geometrischer Axe) versehenen Scheibe von 20 cm Durchmesser und 3 kg Gewicht wirkt eine constante Kraft von $\frac{3}{1962}$ kg.

Wieviel dcm Winkelgeschwindigkeit hat die Scheibe nach 1, 2 ... bis 10 Sekunden erlangt?

203. Eine cylindrische Scheibe von 100 kg Gewicht und 40 cm Durchmesser ist um eine horizontale feste Axe drehbar. Ueber die Scheibe, deren Umfang hierzu flach gerinnt ist, wird eine (gewichtslose) Schnur gelegt, welche an jedem Ende ein Gewicht von 23.95 kg trägt. Die in Folge dessen noch in Ruhe befindliche Scheibe wird durch ein auf das eine der gleichen Gewichte gelegte einseitige Zulagsgewicht von 0.2 kg in Bewegung versetzt.

1) Wie viel dcm beträgt die durch das einseitige Zulagsgewicht hervorgebrachte Winkelbeschleunigung (in 1 dcm Entfernung von der Axe)?
2) Wie viel cm beträgt die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes?
3) Wie viel dcm Winkelgeschwindigkeit erlangt die Scheibe nach 1, 2 ... bis 10 Sekunden?
4) Wie viel cm Geschwindigkeit erlangt das sinkende Gewicht nach 1, 2 ... 10 Sekunden?
5) Wie viel cm beträgt die Senkung des einseitigen Zulagsgewichtes nach 1, 2 ... bis 10 Sekunden?

Fliehkraft.

204 ([342]). Eine Gerade von der Länge l und Dichtigkeit γ kann sich um eine durch einen Endpunkt gehende gegen die Gerade normale Axe drehen. Am andern Endpunkt der Geraden wirkt rechtwinklig gegen die Gerade und immer in der Umdrehungsebene enthalten, die constante Kraft P.

Wie gross ist t Sekunden nach Beginn der Einwirkung der Kraft auf die ruhende Gerade:

die Winkelbeschleunigung, die Winkelgeschwindigkeit und die Resultante der die Gerade angreifenden Fliehkräfte?

205. Ein gerades Prisma von rechteckigem Querschnitt und von den Seiten 3, 4, 5 dcm wird um eine seiner Seitenkanten mit 3.1623 dcm Winkelgeschwindigkeit pro Sekunde gedreht.

Wie viel beträgt die Resultante der Centrifugalkräfte, je nachdem die Drehung um die Kante von 3, 4 oder 5 dcm Länge erfolgt? Dichtigkeit der Prismensubstanz ist $\frac{1}{30}$.

206. Eine cylindrische Scheibe von 98.1 kg wird mit 10 dcm Winkelgeschwindigkeit um eine der geometrischen Axe parallele

Axe gedreht. Wie gross ist die in Folge der Drehung entstehende Centrifugalkraft, je nachdem die Drehungsaxe:

1, 2, 3 ... 10 cm

Abstand von der geometrischen Axe hat?

207. Diese Aufgabe betrifft den Einfluss der Centrifugalkraft auf der Oberfläche der Erde, wobei angenommen wird, die Erde sei eine Kugel, deren Radius gleich dem eines Meridianes sei. Letzterer geht aus der Angabe der Meridianlänge = 40'000000 m hervor.

1) Wie viel Meter beträgt (nach der Grösse des Erdradius und nach der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe) die Centrifugalbeschleunigung der Erde am Aequator?
2) Wie gross würde am Aequator nach Wegfall der Centrifugalkraft die Beschleunigung der Schwere sein, da die daselbst beobachtete:

   9.78009 m

   beträgt?
3) Wie viel mal grösser müsste die Winkelgeschwindigkeit am Aequator sein, wenn die Centrifugalbeschleunigung daselbst der Beschleunigung der Schwere gleich kommen sollte?
4) Wie viel Meter beträgt die Centrifugalbeschleunigung unter der Breite φ?
5) Wie viel Meter betragen die Componenten der Centrifugalbeschleunigung unter der Breite φ, deren eine der Schwere gerade entgegen, deren andere rechtwinklig gegen die Schwere wirkt?
6) Wie viel Meter ist nach Abzug der betr. Componente der Centrifugalbeschleunigung die Beschleunigung der Schwere in der Breite φ?
7) Wie gross ist die Tangente des Winkels, den in der Breite φ die Resultante von Schwer- und Centrifugalkraft mit dem Erdradius bildet und wie gross ist dieser Winkel unter 45° Breite?

208. Eine (massenlose) Gerade von der Länge l trägt am einen Endpunkt die als Punkt zu betrachtende Masse 99, am andern Endpunkt die Masse 9 (ebenfalls als Massenpunkt anzusehen).

Die Linie soll eine rechtwinklig sie durchdringende Axe von der Lage erhalten, dass bei der Umdrehung um diese Axe die Centrifugalkräfte zu beiden Seiten der Drehaxe gleich sind. In

welcher Entfernung von der kleinern Masse 9 muss die Axe angebracht werden? In welcher Entfernung muss sie aber angebracht werden, wenn die Gerade nicht massenlos ist, sondern die Masse 2 hat?

209. Ein (gewichtsloser) Faden ist an einem Ende an eine Axe angeknüpft, am andern Ende trägt er eine Kugel von 5.45 kg Gewicht. Schwerpunkt der Kugel und Anknüpfungspunkt sind 4.5 dcm von einander entfernt.

Bei wie viel Umdrehungen pro Sekunde reisst der Faden in Folge der Centrifugalkraft, da das Zerreissen desselben durch einen Druck von 39.478 kg bewerkstelligt werden würde?

210. Ein Stab von quadratischem Querschnitt, 32.7 kg Gewicht und 6 dcm Länge würde bei einem in seiner Längenrichtung wirkenden Zuge von 3947.8 kg reissen.

Wie viel Umdrehungen pro Sekunde um eine durch einen Endpunkt gehende zur geometrischen Axe rechtwinklige Axe muss der Stab machen, damit er in Folge der Centrifugalkraft zerreisst?

211. Bei einem Centrifugalregulator werden die Stäbe behufs nachfolgender Rechnung als gewichtslos angesehen, jede Kugel hat das Gewicht P, ihr Mittelpunkt von dem Scharnier des Trägers die Entfernung l.

Welchen Winkel x bildet bei der Winkelgeschwindigkeit ω der Drehaxe jeder Träger mit der Drehaxe?

212 (nach Bary). Eine Glasröhre (Axe eine Gerade) bildet mit dem Horizont den Winkel α, sie enthält eine kleine Bleikugel, die durch Umdrehung um eine durch das untere Ende der Röhre gehende verticale Axe in der Röhre in die Höhe steigt

Wie gross muss die Dauer t einer ganzen Umdrehung des Systems sein, damit die an einen Punkt M in der Röhre gelegte Kugel, welche in die Höhe h über der Horizontalebene liegt, bei constanter Winkelgeschwindigkeit liegen bleibt?

Pendel.

213. Bezeichnet man mit l die Länge eines einfachen Pendels, mit α den ursprünglichen Winkelabstand des Fadens von der Gleichgewichtslage (Elevationswinkel), mit g die Beschleunigung der Schwere, so ist der Ausdruck für die Schwingungsdauer (Zeit des halben Hin- und Herganges):

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6 \tfrac{1}{2}\alpha + \ldots \right\}.$$

Wie gross ist der Factor von $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für $\alpha = 1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, 45^0$ (351)?

Die nachfolgenden Aufgaben beziehen sich, wenn nichts anderes ausdrücklich bestimmt wird, auf Pendel, die sehr kleine Schwingungen im nicht widerstehenden Mittel machen, so dass $t = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, wo λ die reducirte Linie des Pendels ist.

214 (352. 354). Ein dünner Draht (gerade Linie) von der Länge l und Dichtigkeit γ der Längeneinheit macht Schwingungen um eine durch einen Endpunkt gehende gegen den Draht rechtwinklige Axe.

Wie gross ist die reducirte Länge und die Schwingungsdauer des Drahtes, wie müssen sich die Längen zweier Drähte verhalten, wenn die Dauer der Schwingungen beider im Verhältniss $1 : n$ stehen soll?

215. Aus sehr dünnem Draht wird ein Quadrat Seite a gebogen, sowie ein Kreis Radius r. Die Schwingungsaxe geht bei beiden durch einen Punkt des Umfanges und ist rechtwinklig gegen die Fläche.

Wie gross ist die reducirte Länge und Schwingungsdauer:

1) wenn beim Quadrat die Axe durch einen Eckpunkt geht;
2) wenn beim Quadrat die Axe durch die Mitte einer Seite geht;
3) (353) wenn beim Kreis die Axe durch einen beliebigen Punkt der Peripherie geht?

216. Eine Quadratfläche, Seite a, und eine Kreisfläche, Radius r, erhalten Schwingungsaxen, welche die Flächen rechtwinklig durchdringen.

Wie gross sind die reducirten Längen beim Quadrat, wenn die Axe resp. in den Entfernungen c oder $\frac{1}{2}a$ vom Schwerpunkt durch die Diagonale gehen?

Wie gross sind die reducirten Längen beim Kreise, wenn die Axe resp. in den Entfernungen c oder $\frac{1}{2}r$ vom Mittelpunkt die Fläche durchdringen?

217 (356). Ein Cylinder vom Radius r und der Höhe h schwingt um eine seiner geometrischen Axe parallele Axe; beide Axen besitzen die Entfernung $\frac{r}{2}\sqrt{2}$ von einander.

Wie gross ist die reducirte Länge?

218 (360). Ein gerades Prisma mit rechteckigem Querschnitt von den Seiten a, b, c erhält eine der Kante a parallele Axe, welche die Entfernung d vom Schwerpunkt hat.

Wie gross ist die Schwingungsdauer t und wie muss b und c gewählt werden, wenn bei constantem Querschnitt $bc = f$, die Schwingungsdauer Minimum werden soll?

219. Bei einem Borda'schen Pendel (sehr dünner Draht mit Platinkugel an einem Ende) war die Länge nahezu 1 m. Um wie viel mm differirt bei einem Pendel, bei welchem der Mittelpunkt der Kugel gerade 1 m vom Aufhängungspunkte entfernt ist und wenn der Radius der Kugel 25 mm beträgt, die reducirte Länge von der Länge 1 m? Das Gewicht des Drahtes ist bei der Berechnung zu vernachlässigen.

220. Nach Sabine's Messungen ist die Länge des einfachen Sekundenpendels am Aequator:

990.94 mm

unter 45^0 Breite:

993.51 mm.

Wie viel Meter ist hiernach der Werth von g in den genannten Breiten?

221. Ist G die aus den Beobachtungen hervorgegangene Beschleunigung der Schwere am Aequator, so ist g unter der Breite φ:

$$g = G\ (1 + 0.005194\ sin^2\varphi).$$

Wie gross ist Schwingungsdauer t eines beliebigen Pendels in der Breite φ, wenn die Schwingungsdauer desselben in der Breite 0^0 gleich τ gefunden worden ist?

222. Wenn die Beschleunigung der Schwere g aus der durch Beobachtung gefundenen Länge l des Sekundenpendels berechnet wird und es ist l aus der Beobachtung um das Stück $\triangle l$ zu gross oder zu klein hervorgegangen; wie gross ist der Fehler beim Werthe von g im Allgemeinen und wenn der Fehler der Sekundenpendellänge 0.1 mm betrug?

223. Das Gewicht eines materiellen Pendels sei P, die Tiefe des Schwerpunktes unter der Aufhängungsschneide sei s, der Massenmittelpunkt habe die Entfernung r von der Aufhängungsschneide. Das Pendel habe ausser der Aufhängungsschneide noch eine zweite nach oben gekehrte Schneide, welche beim ruhenden Pendel senkrecht unter der Aufhängungsschneide in der Entfernung l von letzterer liegt.

Die Schwingungsdauer des Pendels sei t, wenn man aber mittelst Drahtschlinge an die untere Schneide noch ein dem Gewichte des Pendels gleiches Gewicht P anhängt, betrage die Schwingungsdauer t_1 Sekunden.

Es ist die Entfernung s des Schwerpunktes von der Aufhängungsschneide und des Massenmittelpunktes r von der Aufhängungsschneide aus den beobachteten Grössen t und t_1, der unmittelbar gemessenen Grösse l, sowie die bekannte Grösse g zu berechnen.

224. Ein dünner geradliniger Draht von der Masse m und der Länge l erhält in der Mitte eine Schwingungsaxe und auf der einen Hälfte in einer nachfolgend angegebenen Entfernung von der Schwingungsaxe ein einseitiges Gewicht.

Wie gross ist die Schwingungsdauer, wenn

das Gewicht $\frac{1}{3}$ m in der Entfernung $\frac{1}{2}l$ von der Axe,
„ „ $\frac{4}{9}$ m „ „ „ $\frac{1}{4}l$ „ „ „
„ „ $\frac{3}{5}$ m „ „ „ $\frac{1}{6}l$ „ „ „

angebracht wird?

225. Berechnung der Schwingungsdauer einer gleicharmigen Wage und Vergleich des erhaltenen Ausdruckes mit dem Ausdruck für die Empfindlichkeit der Wage, d. i. dem Ausschlage, welchen ein einseitiges Zulagsgewicht p hervorbringt.

Der Rechnung sollen folgende gegebene Grössen zu Grunde liegen:

G Gewicht des leeren Wagbalkens in Milligrammen,
P totale Belastung jeder Endaxe, einschliesslich des Gewichtes der Schale in mgr,
l Hebelarm der Wage, d. i. Abstand jeder Endaxe von der Verticalebene der Mittelaxe in mm,
a Höhe der Mittelaxe über der Ebene der Endaxen bei der Belastung P auf jeder Schale in mm,
s Tiefe des Schwerpunktes des unbelasteten Balkens unter der Mittelaxe in mm,

z Länge der Zunge von der Mittelaxe bis zur Ablesungsscala in mm,

σ Länge eines Scalentheiles in mm,

p einseitiges Zulagsgewicht, durch welches die Empfindlichkeit der Wage geprüft wird,

n Ausschlag in Scalentheilen, welche das Zulagsgewicht p bei der Belastung P hervorbringt,

$\frac{G}{g}r^2$ Trägheitsmoment des leeren Balkens,

t Dauer einer Schwingung bei der Belastung P.

Es werden nun folgende Fragen gestellt:

1) Welches ist der Ausdruck für die Schwingungsdauer t?

2) Welches ist der Ausdruck für die Empfindlichkeit, d. h. wie gross ist n bei gegebenem p?

3) Wenn bei der Wage P, p, n und t sich entsprechen, hierauf aber die Entfernung s oder a durch eine Correctionsmutter oder durch Verrückung der Mittelaxe in verticaler Richtung geändert wird und dann P, p, n' und t' die neuen Verhältnisse repräsentiren, welche Beziehung findet zwischen t, t', n und n' statt?

4) Schwingungsdauer bei einer Schickert'schen Wage, welche durch folgende Constructionsmasse gegeben ist:

Gewicht des leeren Balkens	$G =$	544000 mg,
Gewicht einer Wagschale nebst Gehänge		147820 mg,
Armlänge	$l =$	260 mm,
Länge der Zunge	$Z =$	276 mm,
Länge eines Scalentheiles	$\sigma =$	1.25 mm,
Tiefe des Schwerpunktes unter der Mittelaxe bei unbelastetem Balken	$s =$	0.1936 mm,
Entfernung des Massenmittelpunktes des unbelasteten Balkens	$r =$	175.12 mm.

Die Tiefe der Ebene der Endaxen unter der Mittelaxe ist bei unbelastetem Balken 0.05735 mm und nimmt in Folge der Balkenbiegung für jedes weitere Kilo Belastung um 0.02806 mm zu.

Wie gross ist die Schwingungsdauer bei folgenden Belastungen auf jeder Schale:

Belastung 0, 100 g, 1100 g.

5) Es sind behufs der Bestimmung von r und s in den zu Anfange der Aufgabe genannten Grössen auszudrücken:

die Empfindlichkeit n_0 der Wage bei unbelastetem Balken,
die Schwingungsdauer t_0 der Wage bei unbelastetem Balken.

Diese Ausdrücke führen, sobald die Grössen n_0 und t_0 durch Beobachtung gewonnen worden sind, zur Kenntniss von r und s durch Berechnung.

6) Es sind zwei Ausdrücke für die Schwingungsdauer, einmal bei der Belastung P, das andere Mal bei der Belastung P' aufzustellen; dabei aber

statt der Endaxentiefe a die Endaxentiefe $a + bP$ einzuführen.

a ist die Endaxentiefe bei unbelastetem Balken,
b ist die Balkenbiegung bei 1 mg Belastung.

Hat man die den Belastungen P und P' entsprechenden Schwingungszeiten t und t' durch Beobachtung erhalten, so kann man mit Hülfe der aufzustellenden Ausdrücke a und b berechnen.

Stoss der Körper.

226 ([363] *b.* [372]). In jedem der folgenden Beispiele sind zwei unelastische Massen und die Geschwindigkeiten angegeben, welche sie besitzen, wobei gleiche Vorzeichen gleicher Richtung der Geschwindigkeiten, entgegengesetzte Vorzeichen entgegengesetzter Richtung der Geschwindigkeiten entsprechen.

Wie gross ist die gemeinsame Geschwindigkeit, mit welcher die in jedem Beispiel aufgeführten Massen nach erfolgtem geraden und centralen Stosse sich bewegen?

	1.	2.	3.	4.	5.
Erste Masse:	10	12	18	13	14
Geschwindigkeit cm:	15	6	9	12	15.
Zweite Masse:	5	6	10	12	15
Geschwindigkeit cm:	1	3	5	11	14.

	6.	7.	8.	9.	10.
Erste Masse:	10	12	18	13	14
Geschwindigkeit cm:	15	6	9	12	15.
Zweite Masse:	5	6	10	12	15
Geschwindigkeit cm:	−1	−3	−5	−11	−14.

227. In jedem der folgenden fünf Beispiele sind zwei zusammenstossende Massen nnd ihre Geschwindigkeiten aufgeführt.

1) Wie gross sind die Geschwindigkeiten der Massen nach dem unelastischen Zusammenstosse?

2) Wie gross ist die Zunahme der Geschwindigkeit jeder Masse beim unelastischen Zusammenstosse?

3) Wie gross ist die Zunahme der Geschwindigkeit jeder Masse beim vollkommen elastischen Zusammenstosse?

4) Wie gross ist die Geschwindigkeit jeder Masse nach dem vollkommen elastischen Zusammenstosse?

5) Wie gross ist die Zunahme der Geschwindigkeit jeder Masse nach dem unvollkommen elastischen Zusammenstosse, wenn beispielsweise Gewinn und Verlust an Geschwindigkeit 1.5 Mal so gross als beim unelastischen Stosse gesetzt wird?

6) Wie gross ist unter Beibehaltung der sub 5. gemachten Annahme die Geschwindigkeit bei den Massen nach dem unvollkommen elastischen Zusammenstosse?

	1.	2.	3.	4.	5.
Erste Masse:	4	4	6	2	2
Geschwindigkeit cm:	8	4	0	0	−6.
Zweite Masse:	6	2	2	2	2
Geschwindigkeit cm:	13	10	12	16	6.

228. Die aus gleichem Materiale bestehenden Massen m, Geschwindigkeit v und m_1, Geschwindigkeit $v_1 < v$ stossen gerade und central zusammen. Beträgt die Geschwindigkeitszunahme (im positiven oder negativen Sinne)

bei unelastischem Stosse: γ, so ist sie beim
vollkommen elastischem Stosse: 2γ und beim
unvollkommen elastischem Stosse: $(1+k)\gamma$, wo k ein positiver Bruch ist, der nur durch Versuche bestimmt werden kann.

1) Welche Geschwindigkeit c hat die Masse m, welche Geschwindigkeit c_1 hat die Masse m_1 nach dem unelastischen Zusammenstosse, nach dem vollkommen und nach dem unvollkommen elastischen Zusammenstosse?

2) Welcher Verlust an lebendiger Kraft findet bei allen drei Stossarten statt, d. h. welchen Werth nimmt die Differenz:

$$U = mv^2 + m_1 v_1^2 - (mc^2 + m_1 c_1^2)$$

in jedem der angegebenen Fälle an?

229. Eine Reihe unvollkommen elastischer Kugeln sind so neben einander aufgehangen, dass ihre Mittelpunkte eine Gerade bilden. Die Massen der Kugeln stehen im Verhältniss:

$$m : m\alpha : m\alpha^2 \ldots\ldots\ldots m\alpha^n,$$

wobei α ein echter Bruch ist.

Wenn nun die erste mit centralem Stoss und der Geschwindigkeit v an die zweite stösst, mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die letzte (kleinste) hinweg? Geschwindigkeitszunahme einer Kugel durch den unvollkommen elastischen Stoss $(1 + k)$ Mal grösser als beim unelastischen Stosse.

230. Eine Kugel lässt man aus der Höhe h auf eine horizontale Ebene herabfallen, von welcher sie nach den Gesetzen des unvollkommen elastischen Stosses zurückgeworfen wird (Geschwindigkeitsverlust $(1 + k)$ Mal so gross, als beim unelastischen Zusammenstosse; k ein positiver echter Bruch).

Welche Steighöhe erreicht die Kugel nach dem ersten, zweiten, dritten ... ^{n}ten Auftreffen auf die Fläche?

231. Das Trägheitsmoment eines ballistischen Pendels ist T, die Geschwindigkeit und Masse der Kugel v und m; die Mitte der getroffenen Fläche des Recepteurs hat die Entfernung a von der Axe.

Welche Anfangsgeschwindigkeit erhält die Mitte des Recepteurs durch das Einschlagen der Kugel?

Wirkungsgrösse der Kräfte.

232. Wie gross ist die Wirkung einer Kraft, welche einen ruhenden Körper von 1962 kg Gewicht in:

1, 5, 10, 15, 20 m

Geschwindigkeit versetzt?

233. Wie gross ist die Wirkung einer Kraft, die eine Masse von 1962 kg Gewicht von der Geschwindigkeit:

2 m	in die	Geschwindigkeit	5 m
5 m	„	„	„	10 m
5 m	„	„	„	15 m
10 m	„	„	„	15 m
15 m	„	„	„	20 m

bringt?

234. Der Massenmittelpunkt eines Rades von 490.5 kg Gewicht liegt 2 m von der Axe entfernt. Wie gross ist die Wirkung einer

Kraft, die das Rad aus der nachstehend angegebenen anfänglichen Winkelgeschwindigkeit in die beigesetzte Endgeschwindigkeit versetzt?

	1.	2.	3.	4.	5.
Anfangsgeschwindigkeit m:	0	0	1	2	3
Endgeschwindigkeit m:	1	4	4	4	4.

235. Eine Masse von 19.62 kg ist durch eine Kraft um 10 m senkrecht in die Höhe zu heben. Die Anfangsgeschwindigkeit, welche die Masse bei Beginn der Hebung hat und die Endgeschwindigkeit, welche sie am Ende der Hebung hat, ist in jedem der folgenden Beispiele angegeben.

	1.	2.	3.	4.	5.
Anfangsgeschwindigkeit m:	0	0	1	2	2
Endgeschwindigkeit m:	0	1	2	2	4.

236. Eine Masse von 1962 kg wird durch eine Kraft in 100 Sekunden aus der Ruhe in:

10, 20, 30, 40, 50 m

Geschwindigkeit gebracht.

Wie viel Pferdekräften kommt diese Leistung gleich?

237. Ein Körper vom Gewicht P ist in die Geschwindigkeit c versetzt worden. Die Wirkungsfähigkeit, welche er in Folge dessen besitzt, wird ganz oder theilweise aufgezehrt, entweder

1) durch Fortgleiten auf horizontalem Boden, wobei zwischen Unterlage und Körper Reibung existirt, deren Grösse für die Belastung 1 gleich ϱ ist;
2) oder, indem man den Körper sich senkrecht aufwärts zu bewegen überlässt, bis er nach Hebung seines eignen Gewichtes zur Ruhe gelangt;
3) oder, indem man den Körper in eine Lage bringt, in welcher seine Geschwindigkeit mit dem Horizont den Winkel ε bildet, so dass der Körper in der Parabel aufsteigend sein eignes Gewicht auf eine entsprechende Höhe hebt.

Wie weit geht in jedem der genannten Fälle der Körper, bis der ganze verfügbare Theil seiner Wirkungsfähigkeit verbraucht ist?

238. Das Trägheitsmoment eines in 3.1416 m Winkelgeschwindigkeit versetzten Rades beträgt 50. Wie viel Umdrehungen wird das Rad sich selbst überlassen machen, bis es zur Ruhe gelangt, da die auf die Entfernung 1m von der Axe reducirte Zapfenreibung $\frac{1}{4}$ kg beträgt?

Druck flüssiger Körper auf den Boden und die Seitenwände der einschliessenden Gefässe.

239. Ein Wasserreservoir ist 1 m hoch mit Wasser gefüllt, wie viel kg Druck erhält die kreisrunde horizontale Bodenfläche von $\frac{1}{2}$ m Durchmesser und vier in derselben angebrachte kreisrunde Ventile von 4, 5, 6, 8 cm Durchmesser?

240. Wie viel Kilo Druck hat die horizontale Bodenfläche von 100 qcm Inhalt einer 10 cm hoch mit Quecksilber vom spec. Gew 13.6 gefüllten Flasche zu erleiden und um wie viel kg steigt der Bodendruck bei Erhöhung der Quecksilberfüllung um 1 cm?

241. Ein Wasserbehälter hat die Form eines abgekürzten Kegels, die horizontale Bodenfläche hat 75 qdcm Inhalt, die Oberfläche 48 qdcm.

Die Höhe ist in den berechneten fünf Beispielen:

	1.	2.	3.	4.	5.
dcm	1	3	5	7	9.

Wie viel Kilo ist bei vollständiger Füllung des Behälters die Differenz zwischen Bodendruck und Gewicht des im Behälter enthaltenen Wassers?

242. Ein Holzwürfel von 1 dcm Seite wird mittelst Schnur und an derselben angehangenes Ziehgewicht ins Meer eingesenkt, wobei Oberfläche und Unterfläche horizontal bleiben. Wenn nun der Abstand der Oberfläche vom Niveau 1000 m geworden ist, wie viel kg beträgt der Druck, den jede der sechs Aussenflächen des Würfels zu erleiden hat? Spec. Gew. des Meereswassers 1.029.

243. Ein Gefäss in Form eines geraden Prismas mit rechteckigem Querschnitt hat die Höhe c; die rechteckige Grundfläche, Seiten a, b, ist horizontal.

In welcher Entfernung von der Bodenfläche greift die Resultante der Seitendrücke die Seitenflächen des vollständig mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes an?

244 ([425]). Ein Wasserbehälter soll im Lichten rechteckig parallelepipedische Form erhalten. Die horizontale Grundfläche soll den constanten Inhalt f haben und ihre Seiten a, b so gewählt werden, dass das Wasser, welches den Behälter bis zu beliebiger Höhe h anfüllt, auf die vier Seitenwände zusammengenommen den möglichst kleinsten Seitendruck ausübt.

Wie gross ist a und b anzunehmen, damit wie verlangt, die Summe aller horizontalen Seitendrücke Minimum wird?

Hydrostatischer Auftrieb und Bestimmung des specifischen Gewichtes fester und flüssiger Körper.

245. Jemand, der mit äusserster Anstrengung seiner Kräfte noch eine Last von 50 Kilo heben oder mit den Armen einen Druck von sich weg von 50 Kilo hervorbringen kann, kann unter Wasser liegende Lasten von verschiedenem absoluten Gewichte je nach deren specifischen Gewichte heben.

Wie viel Kilo wiegt einer der folgenden Gegenstände in der Luft, welche von dem Betreffenden unter Wasser gerade noch gehoben werden können?

	Basalt.	Porphyr.	Eisen.	Silber.	Platin.
spec. Gew.:	2.5	5	7.5	10	21

Wie viel wiegt ein Stück Holz (spec. Gew. 0.5), welches von der Person mit Anstrengung noch unter der Oberfläche des Wassers festgehalten werden kann?

246. Wie viel Gramm wiegen 100 g folgender Substanzen unter Wasser?

	Ebenholz	Asphalt.	Brauneisenstein.	Eisen.	Kupfer.
spec. Gew.:	1	1.1	4	$7\frac{1}{2}$	9.

247. Wieviel (ganze) Kubikcentimeter Wasser treten aus einer bis zum Rand gefüllten Schale mit Wasser aus, wenn man 10 kg folgender Substanzen in die Schale bringt und die eingebrachten Substanzen gänzlich untertauchen?

	Messing.	Kupfer.	Silber.	Blei.	Gold.
spec. Gew.:	8.5	9.0	10.5	11.4	19.25.

248. Wie viel mg wiegt einer der folgenden festen Körper in der dazu notirten Flüssigkeit?

(430)	(432)	(433)
10 g Gusseisen	10 g Glas	9999.9 mg Glas
spec. Gew. 7.25	spec. Gew. 2.75	spec. Gew. 2.75
in:	in:	in:
Alkohol	Leinöl	Seewasser
spec. Gew. 0.798	spec. Gew. 0.94	spec. Gew. 1.03.

249. Wie gross ist das specifische Gewicht folgender Körper nach den darüber gemachten Angaben?

(435) 2025 mg Krystallglas erlitten beim Wägen unter Wasser 810 mg Auftrieb;

([437]) 4213 mg Gold erlitten beim Wägen unter Wasser 220.5 mg Auftrieb;

([440]) 1216 mg Salpeter erlitten beim Wägen in Alkohol von 0.792 spec. Gewicht, 481.5 mg Auftrieb.

250. Aus den Resultaten der Wägung folgender Substanzen in Luft und Wasser ist das specifische Gewicht der Substanzen zu ermitteln.

Name der Substanz:	Gewicht in Luft:		Gewicht in Wasser:
([434]) Blei	1205	mg	1099.2
([436]) Kupfer	1809	„	1608
([438]) Messing	1208	„	1057
([439]) Silber	2320	„	2100
Bronce	860	„	760
Platin	426.8	„	406.8
Porcellan	1245	„	745
Bernstein	642	„	42
Eisendraht	1550	„	1350
Graues Roheisen	1550	„	1335.

251. Zu welchem specifischen Gewicht führen folgende Wägungen der genannten Substanzen in Luft und Alkohol vom spec. Gew. 0.8?

	Gewicht in Luft:	Gewicht in Alkohol:
doppelt kohlensaures Kali	2010	800
schwefelsaures Kali	1310	400
dichter Kalkstein	500	160
dichter Gyps	1000	400
natürlicher Kupfervitriol	840	240.

252 ([441. 442]). Bei folgenden Bestimmungen des specifischen Gewichtes von Holz wurden die nachgenannten Gewichtsmengen Holz in einen graduirten, zum Theil mit Spiritus gefüllten Messcylinder vermittelst eines messingenen Ziehgewichtes und Drahtschlinge eingesenkt, welche letztere beiden nach den Vorversuchen zusammen 5 cbcm Spiritus verdrängten.

Nach dem Einsenken von 37.057 g Faulbaumholz erhöhte sich das Spiritusniveau um 81.304 cbcm; nach dem Einsenken von 22.038 g lufttrocknen Erlenholz aber um 45.53 cbcm.

Wie gross ist hiernach das specifische Gewicht von Faulbaumholz und Erlenholz?

253. In ein Pyknometer, welches 10000 mg, mit Wasser gefüllt, wiegt, werden folgende Gewichtsmengen von Körpern eingefüllt und hierauf nach dem sorgfältigen Abwischen des verdrängten Wassers, Pyknometer nebst Inhalt gewogen.

Aus folgenden Angaben ist das specifische Gewicht der betreffenden Körper zu berechnen.

	Absolutes Gewicht:	Pyknometergewicht:
(443) Zinnstein	5212 mg	14410.2
Marmor	2750 „	11750
Neusilberdraht	8550 „	17550
Pyrop	7560 „	15560
Bleiweiss	16000 „	23500.

254. Ein Pyknometer, welches leer 15110 mg wiegt und 10000 mg Wasser fasst, hat nach der Füllung mit nachfolgenden Flüssigkeiten das Gewicht:

Vitriolöl	33610 mg
Terpentinöl	23710 „
abs. Alkohol	23030 „
Moselwein	24270 „
Bier	25410 „

Welche specifischen Gewichte haben hiernach die genannten Flüssigkeiten?

255. Eine Glaskugel an sehr dünnem Platindraht wiegt in der Luft 12500 mg, in nachfolgenden Flüssigkeiten jedoch:

Wasser	7500 mg
absol. Alkohol	8545 „
Kreosot	7315 „
Olivenöl	7975 „
Rüböl	7925 „
Salpetersäure	6400 „

Wie gross ist hiernach das specifische Gewicht der zuletzt genannten fünf Flüssigkeiten?

256. Wie gross ist das specifische Gewicht eines festen Körpers, welcher in der Luft das Gewicht L und im Wasser das Gewicht W hat? Wie gross ist der Fehler $\triangle s$ im specifischen Gewicht, wenn bei der Bestimmung von W ein Fehler in der Grösse $\triangle W$ begangen worden ist? Es ist eine kleine Tabelle zu berechnen, in welcher für $\frac{\triangle W}{L} = \frac{1}{10000}$ der Fehler $\triangle s$ von s für $s = 2,\ 4,\ 6 \ldots 20$ (zwei Decimalen) angegeben ist.

257. Wie gross ist das specifische Gewicht eines festen Körpers, welcher in Luft das Gewicht L und in einer Flüssigkeit vom specifischen Gewicht γ das Gewicht F hat? Wie gross ist der Fehler $\triangle s$ im specifischen Gewicht, wenn bei der Bestimmung von F der Fehler $\triangle F$ begangen worden ist? Es ist eine kleine Tabelle zu berechnen, in welcher für $\frac{\triangle F}{L} = \frac{1}{10000}$, für $\gamma = 0.8$ und $s = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ der Fehler $\triangle s$ angegeben ist.

258. Das Gewicht eines Pyknometers mit Wasser ist P, das Gewicht eines festen Körpers ist K, das Gewicht des mit Wasser gefüllten Pyknometers nach dem Einbringen des Körpers G.

Wie gross ist das specifische Gewicht s des Körpers?. Wie gross ist der Fehler $\triangle s$ von s, wenn bei der Bestimmung von G der Fehler $\triangle G$ begangen wurde? Es ist eine Tabelle zu berechnen, in welcher für $\frac{\triangle G}{K} = \frac{1}{1000}$ und für $s = 2,\ 4 \ldots$ bis 20 der Fehler $\triangle s$ (zwei Decimalen) angegeben ist.

259. Das Gewicht des Pyknometers allein ist p, das Gewicht desselben mit Wasser gefüllt ist w, mit Flüssigkeit gefüllt f. Wie gross ist das specifische Gewicht s der Flüssigkeit, wie gross der Fehler $\triangle s$ von s beim Fehler $\triangle f$ in der Bestimmung von f? Es ist eine Tabelle zu berechnen, in welcher $\triangle s$ für $\frac{\triangle f}{f-p} = \frac{1}{1000}$ und $s = 2,\ 4 \ldots 14$ anzugeben ist (zwei Decimalen).

260. Das Gewicht einer Glaskugel sei
in Wasser W,
in einer Flüssigkeit F,
in der Luft L.

Wie gross ist das specifische Gewicht s der Flüssigkeit? Wie gross ist der Fehler $\triangle s$ von s bei einem Fehler $\triangle F$ in der Bestimmung von F? Es ist eine Tabelle des Werthes $\triangle s$ für $\frac{\triangle F}{L-F} = \frac{1}{1000}$ und $s = 1,\ 1.5 \ldots$ und 2 zu entwerfen (zwei Decimalen).

261. Eine Platinkugel von 10.5 g Gewicht und dem spec. Gew. 21, dient bei Bestimmungen des spec. Gewichts von Körpern, die leichter als Wasser sind, als Zuggewicht beim Wägen unter Wasser. Wie gross ist das Gewicht des leichten Körpers höchstens,

welches die Platinkugel noch unter Wasser zu erhalten vermag, wenn für den leichten Körper specifische Gewichte von:

$$0.1;\ 0.2 \ldots \text{ bis } 0.9$$

angenommen werden?

262. Ein Körper hat das absolute Gewicht P in kg und das spec. Gew. $s > 1$; derselbe soll durch Verbindung mit x kg Korkholz von 0.25 spec. Gew. im Wasser schwebend erhalten werden.

Wie gross ist x im Allgemeinen und für den Menschen (mittl. spec. Gew. $= 1.1$) im Besonderen?

Tiefe des Eintauchens schwimmender Körper.

263. Um wie viel mm hebt sich eine Eisscholle (spec. Gew. 0.9) von 1 m gleichmässiger Stärke, wenn sie aus Flusswasser spec. Gew. 1, in Meereswasser spec. Gew. 1.03 übergeführt wird?

264. Ein oben offener Blechwürfel von 1 dcm Seite, Gewicht eines qdcm Blech $= 0.2$ kg wird in folgende Flüssigkeiten gebracht. Wieviel cm sinkt der Würfel ein (1 Decimale)?

	Alkohol.	Wasser.	Meerwasser.	Schwefelsäure.	Quecksilber.
spec. Gew.:	0.8	1.0	1.03	1.842	13.6.

265. Ein Blechwürfel, oben offen, 5 dcm Seite, Gewicht des qdcm Blech 0.4 kg, wird in eine der soeben genannten Flüssigkeiten gebracht.

Wie viel dcm (zwei Decimalen) sinkt der Würfel ein?

Wie viel kg (1 Decimale) müssen gleich vertheilt im Innern des Würfels zugesetzt werden, damit der Würfel in jeder Flüssigkeit bis zur Hälfte einsinkt?

266. Ein Gefäss ist mit zwei hinreichend hohen Schichten verschieden schwerer Flüssigkeiten angefüllt, die untere Schicht hat das specifische Gewicht σ, die obere γ.

Wenn nun eine Kugel vom spec. Gew. s in die Flüssigkeiten gebracht wird und sie schwimmt in denselben in der Weise, dass ihre obere Hälfte in der leichteren, ihre untere Hälfte in der schwereren Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, welche Beziehung findet zwischen s, σ ung γ statt?

Wenn die Kugel von Eisen spec. Gew. 7.6 und die schwerere Flüssigkeit Quecksilber spec. Gew. 13.6 ist, welches spec. Gew. muss die leichtere Flüssigkeit haben, damit die Erscheinung stattfinde?

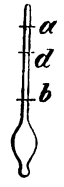
267. Eine Kugel vom spec. Gew. s wird in ein Gefäss gebracht, welches mit zwei hinreichend hohen Schichten einer am Boden lagernden schwereren Flüssigkeit spec. Gew. σ und einer darüber gegossenen leichteren Flüssigkeit spec. Gew. γ angefüllt ist.

Welcher Volumtheil der schwimmenden Kugel befindet sich in der oberen Flüssigkeit, welcher in der unteren? $\sigma > s > \gamma$.

Der wievielte Theil einer eisernen Kugel von 7.6 spec. Gew. schwimmt in der oberen Flüssigkeit, der wievielte Theil in der unteren, wenn am Boden Quecksiber spec. Gew. 13.6, darüber resp. Wasser spec. Gew. 1 oder Alkohol spec. Gew, 0.8 steht?

268 ([460]). Ein Scalenaräometer (Fig. 3), dessen Röhre von a bis b genau cylindrisch ist, sinkt in eine Flüssigkeit vom spec. Gew. σ bis b, in eine Flüssigkeit vom spec. Gew. γ bis a ein.

Fig. 3.



Wie gross ist das specifische Gewicht y der Flüssigkeit, in welche es bis d ($bd = x$, $ba = l$) einsinkt?

Wenn das Instrument bis b in reines Wasser, bis a in eine Flüssigkeit vom spec. Gew. 0.7 einsinkt und man theilt den Abstand ab in 6 gleiche Theile und schreibt an die Theilpunkte von oben nach unten die sieben specifischen Gewichtszahlen 0.7, 0.75 ... 1; welche specifischen Gewichte entsprechen den angeschriebenen Zahlen und welche Correction ist an jeder angeschriebenen Zahl anzubringen, um auf das der betreffenden Stelle entsprechende spec. Gewicht zu kommen?

Bei einem für schwerere Flüssigkeiten bestimmten Aräometer sinkt das Instrument bis b in Flüssigkeit vom spec. Gew. 2, bis a in reines Wasser ein. Eintheilung des Raumes ab in zehn gleiche Theile und Anschreiben der specifischen Gewichte von oben nach unten an die Theilstriche 1.1, 1.2 ... bis 2.0 ergiebt eine unrichtige Scala. Welche Zahlen müssten eigentlich an die Theilstriche geschrieben werden und wenn die vorhin genannten Zahlen wirklich angeschrieben worden sind, welche Correctionen sind an ihnen anzubringen, um auf die richtigen specifischen Gewichte zu kommen, die dem Theilstrich entsprechen?

269. Ein fertiges Aräometer soll nach einem dem Brisson'schen ähnlichen Principe geprüft werden, indem vorerst durch Rechnung das Gewicht ermittelt wird, mit welchem oben auf geeignete Weise das Aräometer beschwert werden muss, damit es in einer schwereren Flüssigkeit bis zu dem Scalentheile einsinke, bis zu welchem es ohne

Beschwerung in einer leichteren Flüssigkeit einsinkt und hierauf die Richtigkeit des in Rechnung gezogenen Scalentheils durch den Versuch geprüft wird.

Welches Zusatzgewicht z bewirkt Einsinken des Aräometers in eine Flüssigkeit vom spec. Gew. σ bis an den Scalentheil, welcher dem kleineren spec. Gewicht y entspricht. (Figur und Bezeichnungen wie in voriger Aufgabe.)

Bei einem Aräometer für leichtere Flüssigkeiten entspricht der Punkt b, Fig. 3 dem specifischen Gewicht 1, der Punkt a dem spec. Gew. 0.7. Welches Zusatzgewicht z erfordert die Prüfung der Scalentheile 0.8 und 0.9 beim Aräometergewicht P?

Bei einem Aräometer für schwerere Flüssigkeiten entspricht der Punkt b, Fig. 3 dem specifischen Gewicht 2, der Punkt a dem specifischen Gewicht 1. Welche Zusatzgewichte erfordert die Prüfung der Scalentheile der specifischen Gewichte 1.1, 1.2 ... 1.9, wenn die Einsenkung in die Flüssigkeit vom specifischen Gewicht 2 erfolgen soll?

Capillarität.

270. Die Depression des Quecksilbers in Glasröhren beträgt für 1 mm Weite der Röhre nahezu 4.5 mm.

Um wie viel steht demnach das Quecksilber in einer engen Röhre von 0.1 mm, 0.2 mm ... 1.0 mm niedriger als in einer mit dieser durch einen U-Schenkel verbundenen sehr weiten Röhre?

271. Alkohol von 0.8196 spec. Gew. wird in einer engen Glasröhre von 1 mm Durchmesser um 12.16 mm über das Niveau der umgebenden Flüssigkeit eines weiten Gefässes gehoben.

Wie viel mm beträgt die Hebung, wenn eine an beiden Seiten offene Glasröhre von 0.1 mm, 0.2 mm ... 1.0 mm gleichmässiger Weite in ein weites mit Alkohol gefülltes Gefäss senkrecht eingestellt wird?

272. Wasser steht in einem 1 mm weiten cylindrischen Rohre 30.26 mm höher, als in einem damit in Verbindung stehenden weiten Gefässe.

Um wie viel mm würde es in cylindrischen Röhren von 0.1 mm, 0.2 mm ... 1.0 mm Weite höher stehen, als in einem umgebenden sehr weiten Gefässe?

273. Zwei grosse ebene Glasplatten werden senkrecht auf dem Boden eines weiten Gefässes aufgestellt, sie berühren sich hierauf

an dem einen Ende in einer senkrechten Geraden und stehen mit dem anderen 1 m davon entfernten Ende 1 mm von einander ab.

Welches ist die Gleichung der Curve, welche zwischengegossener Alkohol oder Wasser bildet, da die Steighöhe zwischen Platten halb so gross als in Röhren ist (s. Aufg. 271 und 272); die y-Axe sei die senkrechte Gerade, welche die Platten gemeinschaftlich haben, die x-Axe liege im Niveau der äusseren Flüssigkeitsoberfläche.

Ausfluss von Flüssigkeiten.

274. Ein Ausflussgefäss mit dünnen Wänden hat im Boden oder in einer Seitenwand eine Ausflussöffnung von 1 qdcm Flächeninhalt.

Wie viel Liter Wasser fliessen pro Sekunde aus dem Ausflussgefäss bei fortwährend constant erhaltener Druckhöhe aus, wenn die Druckhöhe:

1, 4, 9, 16, 25 dcm

beträgt und die wirklich ausfliessende Wassermenge = 0.616 der theoretischen Ausflussmenge beträgt. $g = 981$ cm.

275. Ein Ausflussgefäss hat constant 9 dcm Wasserhöhe über der Ausflussöffnung. Wie viel Liter beträgt das Ausflussquantum in 100 Sekunden, wenn die Ausflussöffnung ein Quadrat von:

5, 4, 3, 2, 1 cm

Seite ist. Ausflusscoëfficient wie oben 0.616, $g = 981$ cm.

276. Bei constant erhaltenem Niveau liefert ein Ausflussgefäss ein bestimmtes Ausflussquantum bei 100 qcm Ausflussöffnung in 10 Sekunden. Wie viel qcm müsste die Ausflussöffnung Inhalt haben, wenn dasselbe Ausflussquantum in 1, 2 ... bis 9 Sekunden ausfliessen sollte?

277. Die Ausflussöffnung in der senkrechten Wand eines Ausflussgefässes befindet sich 1 m über dem horizontalen Boden des Versuchszimmers. Wenn das Niveau im Gefäss:

10 cm, 40 cm, 90 cm, 160 cm, 250 cm

über der Mitte der Ausflussöffnung liegt und die wirkliche Ausflussgeschwindigkeit 0.925 der theoretischen beträgt, in welcher Entfernung von der Verticalebene der Ausflusöffnung erreicht der Strahl den Boden? $g = 981$ cm.

278. Ein Gefäss, im Lichten von der Form eines geraden Prisma's, läuft durch eine am Boden angebrachte Ausflussöffnung

von 4 qcm Inhalt vollständig aus, ohne dass während des Ausfliessens etwas zugesetzt oder weggenommen wird.

In welcher Zeit erfolgt der Ausfluss, wenn der Querschnitt des Gefässes 6160 qcm ist und die anfängliche Höhe des Niveau's über der Ausflussöffnung in Centimetern

19.62 78.48 176.58 313.92 490.5

beträgt. Ausflusscoëfficient = 0.616, Beschleunigung der Schwere 981 cm.

279. Die in verticaler Seitenwand eines Ausflussgefässes befindliche Oeffnung liegt 490.5 cm über dem horizontalen Fussboden des Versuchszimmers. Die auf dem Horizont gemessene Sprungweite des Strahles beträgt:

20, 30, 40, 50, 60 cm.

Wie viel cm beträgt hiernach die Ausflussgeschwindigkeit?

Wie hoch muss die Ausflussöffnung über dem horizontalen Boden liegen, damit die Ausflussgeschwindigkeit die Hälfte der Sprungweite, der Sprungweite gleich oder dem Doppelten der Sprungweite gleich sei?

Luftdruck und Barometer.

280 ([479. 480]). Die Gesammtoberfläche eines Erwachsenen beträgt circa 1 qm.

Wie viel Kilo beträgt der Druck der Luft bei 760 mm Barometerstand auf eine Fläche von 1 qm. 1 cbm Quecksilber wiegt 13598 kg.

281. Der Durchmesser von zwei Guericke'schen Halbkugeln beträgt im Lichten $\frac{1}{10}$ m. Wenn dieselben nicht vollständig leer gepumpt worden sind, sondern die in ihnen enthaltene Luft noch eine Expansivkraft von mm:

684 608 532 456 380 304 228 152 76

zeigt, wie viel (ganze) Kilo ist in jedem der angegebenen Fälle der Druck, mit dem die Luft die eine Halbkugel gegen die andere presst? 1 cbm Quecksilber = 13598 kg.

282. Wenn eine horizontale Fläche von 1 qdcm einen Luftdruck von 760 mm zu erleiden hat, so ist er eben so gross, als wenn dieselbe Fläche das Gewicht einer darüber stehenden 760 mm hohen Quecksilberschicht zu ertragen hätte.

Wie viel Kilo würde der Druck betragen, wenn die auf der Fläche stehende Säule nicht aus Quecksilber spec. Gew. 13.598 (wofür der Druck ebenfalls zu berechnen ist), sondern aus:

	Terpentinöl.	Schwefelkohlenstoff.	Rüböl.	Schwefeläther.	Wasser.
spec. Gew.:	0.86	1.263	0.915	0.710	1.00

bestände (1 Decimale)?

283. Wie viel m hoch müsste die Flüssigkeit bei 760 mm Luftdruck in einem Barometer stehen, welches eine der folgenden Flüssigkeiten enthält (eine Decimale). Die Berechnung nimmt nur ihren Anhalt am specifischen Gewicht der Substanzen und sieht von der durch Verdampfung der Flüssigkeiten gebildeten Expansivkraft vorläufig ab. Spec. Gew. des Quecksilbers 13.598.

	Rüböl.	Terpentinöl.	Schwefelkohlenstoff.	Aether.	Wasser.
spec. Gew.:	0.915	0.86	1.263	0.71	1.0.

Mariotte's Gesetz.

284. In einem cylindrischen Gefässe ist ein 20 cm langer mit Luft von der Expansivkraft d gefüllter Raum durch einen verschiebbaren Stempel dicht abgeschlossen. Mit welcher Kraft muss am Stiele des Stempels widergehalten werden, nachdem man letzteren so weit herausgezogen hat, dass die Länge des cylindrischen Luftraumes:

30, 40, 50, 60, 70 cm

beträgt?

285. Ein halbkugelförmig geschlossener Cylinder ist mit einem Quantum Luft gefüllt, welches durch einen dicht abschliessenden Stempel eingeschlossen gehalten wird. Der Radius des Cylinders ist r, die eingeschlossene Luft nimmt ausser dem halbkugelförmigen Theil noch den daran grenzenden cylindrischen Theil von der Länge:

$2r$, $4r$, $6r$, $8r$, $10r$

ein. Ihre Expansivkraft, welcher bei diesen Stellungen des Stempels durch den atmosphärischen Druck das Gleichgewicht gehalten wird, ist d.

Mit welcher von aussen nach innen wirkenden Kraft muss der Stempel gehalten werden, nachdem man ihn in jedem der angegebenen Beispiele bis zum halbkugelförmigen Theil hineingeschoben hat?

286. Das specifische Gewicht der Luft von 0^0 und 760 mm ist (Berlin) 0.001293606, des Wassers von 4^0 C.

Wie gross ist das specifische Gewicht der Luft bei den Barometerständen 750, 751 ... 770?

287 (491. 493). An einander angrenzende und durch kurze Hahnstücken verbundene Recipienten enthalten anfangs bei geschlossenen Hähnen die Quantitäten

$$R\ R_1\ R_2 \ldots$$

trockner Luft, deren specifische Gewichte:

$$\gamma\ \gamma_1\ \gamma_2 \cdots$$

und deren Expansivkräfte

$$B\ B_1\ B_2 \ldots$$

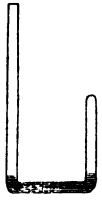
sind.

Wie gross ist nach dem Oeffnen der Hähne das specifische Gewicht und die Expansivkraft der gemischten Gasmengen, wenn die in den Hahnbohrungen enthaltenen Luftquantitäten vernachlässigt werden?

Wenn in fünf Recipienten folgende Gasmengen eingeschlossen sind und die darunter angemerkten Expansivkräfte haben, wie gross ist die Expansivkraft des Gemisches?

Volumina cbcm:	500	600	700	800	900
Expansivkraft mm:	2	40	60	100	200.

Fig 4.



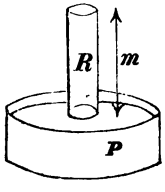
288. Der horizontale Schenkel des kalibrirenden Rohres (Fig. 4) enthält Absperrungsquecksilber für die im kurzen Schenkel von 10 cm Länge enthaltene Luft von 76 cm Expansivkraft.

Wenn nun in den offenen Schenkel Quecksilber nachgegossen und dasselbe in einem Rohre von gleichem Durchmesser abgemessen wird, so fragt es sich, wie viel cm Quecksilber ist einzugiessen, damit die Länge des Luftvolumens im kurzen Schenkel nur noch:

$$9,\ 8 \ldots\ 3,\ 2,\ 1 \text{ cm}$$

beträgt?

Fig. 5a.



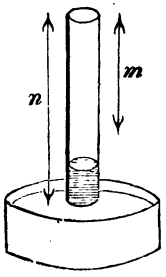
289. Die an einem Ende geschlossene cylindrische (gut kalibrirte) Röhre R (Fig. 5a und b) wird beim Barometerstand B mit Luft gefüllt; sie enthält, wenn ausserhalb und innerhalb gleiches Niveau ist, eine Luftsäule von der Länge m. Wird das Rohr soweit senkrecht gehoben, dass das obere Ende über dem äussern Niveau im weiten Gefässe die Höhe n hat, so fragt es sich, welche Länge x nimmt dann die durch das Quecksilber abgesperrte Luft ein?

Wenn die anfänglich bei gleichem Niveau in der Röhre und im weiten Gefässe abgesperrte Luftmenge 10 cm Länge und 76 cm Expansivkraft hat und die eingesperrte Luftsäule soll hierauf durch Emporbewegung der Röhre ausgedehnt werden, auf:

10.2 cm, 10.4 cm, 10.6 cm, 10.8 cm, 11.0 cm

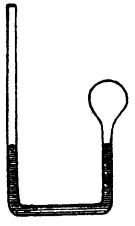
Länge, um wie viel cm (eine Decimale) muss die Röhre aus der Flüssigkeit emporgezogen werden?

Fig. 5b.



290. In einem am kürzeren Schenkel mit grösserem kugligen Luftraum verbundenen, kalibrirenden Manometer (Fig. 6) ist anfänglich ein Volumen Luft bei 76 cm Druck abgesperrt worden, wobei das Quecksilber in beiden Schenkeln gleich hoch steht. Bringt man nun den Apparat unter die Glocke der Luftpumpe und verdünnt damit die Luft, so steigt das Quecksilber im offenen Schenkel des Apparates.

Fig.6.



Wie gross ist der Raum (ganze cbcm), den die abgesperrte Luft ursprünglich bei 76 cm Druck einnahm, wenn folgende Niveaudifferenzen bei den angegebenen Drucken der verdünnten Luft unter der Glocke der Luftpumpe eintraten?

Niveaudifferenz cm:	1	2	3	4	5
Druck der umgebenden Luft cm:	69	68	67	66	65
Niveaudifferenz cm:	6	7	8	9	10
Druck der umgebenden Luft cm:	64	63	62	61	60.

291 (nach Lamé). Der verschlossene Schenkel eines Heberbarometers (kalibrirt) hat die Höhe h, von der Horizontalebene aus gemessen, welcher unter dem atmosphärischen Drucke p das Quecksilberniveau des offenen Schenkels angehört. Man lässt nun in die barometrische Leere eine Quantität trockene Luft treten, welche unter dem gegenwärtigen atmosphärischem Drucke p' n Abtheilungen der Röhre einnehmen würde.

Wie gross ist der Niveauunterschied x des Quecksilbers in beiden Schenkeln nach Eintreten eines neuen Gleichgewichtszustandes?

292 (nach Lamé). Eine kalibrirte, graduirte, oben offene Röhre, die immer in senkrechter Lage gedacht werden mag, enthält am Boden eine Luftblase, welche n Volumtheile unter dem Drucke b einnehmen würde, darüber Quecksilber bis an's obere Ende der Röhre,

äusserer Luftdruck b. Nach dem Einbringen der Röhre (Länge im Lichten h) unter die Glocke der Luftpumpe und Auspumpen, dehnt sich die Luftblase aus und es läuft Quecksilber über.

Welchen Raum nimmt die Luftblase ein, nachdem die Glocke ganz luftleer gemacht ist?

Wenn die Luftblase unter 760 mm Luftdruck das Volumen $\frac{1}{3}\frac{1}{0}\frac{1}{4}\frac{1}{0}$ mm einnehmen würde, wie gross ist sie nach dem Auspumpen, wenn die Höhe der Röhre 100 mm beträgt?

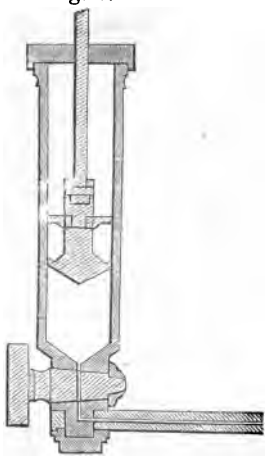
293 (nach Lamé). In einer weiten Quecksilberwanne wird senkrecht eine kalibrirte Röhre festgehalten, in welcher eine Quantität trockene Luft sich befindet. Das obere Röhrenende hat vom Niveau der Quecksilberwanne den Abstand h Millimeter, das innere Niveau in der Röhre den Abstand u Millimeter von demselben äussern Niveau. Der Barometerstand x der umgebenden Luft ist aus der Angabe zu bestimmen, dass die Röhre t Millimeter herabgedrückt werden muss, damit das Niveau in der Röhre und in der Wanne gleich werde.

Wie gross ist der äussere Luftdruck nach folgenden Angaben:

		1.	2.	3.	4.
Röhrenhöhe vom Niveau der Wanne an	mm:	355	300	300	300
Niveaudifferenz in beiden Gefässen	mm:	191	255	152	251
Depression der Röhre	mm:	232	270	181.6	$267\frac{1}{3}$

Luftpumpe.

Fig. 7.



294 (515). Es ist die Expansivkraft zu berechnen, welche die Luft nach n Kolbenzügen in einem (in Fig. 7) nicht angegebenen Recipienten einer Luftpumpe besitzt. Hierzu dienen folgende Angaben:

Vor dem Beginn des Auspumpens sind alle hohlen Räume des Apparates mit Luft von derselben Expansivkraft als die äussere erfüllt, deren Grösse B sein möge. Die Summe der Inhalte von Recipienten, Canal und der (in Fig. 7 angegebenen) Bohrung des Hahnes sei G. Der schädliche Raum (in der Figur: Fortsetzung der Hahnbohrung bis zum Cylinderboden) sei S. Der Raum, welcher nach vollendetem Aufzuge des Kolbens zwischen dem Cylinderboden und der unteren Kolbenfläche

sich befindet, sei C. Wie gross ist die Expansivkraft der Luft nach n Kolbenzügen unter der Voraussetzung vollkommener Dichtung aller Theile des Apparates? Bei Ausführung der Rechnung führen die Bezeichnungen:

$$\frac{G}{G+S+C}=p,\quad \frac{S}{G+S+C}=q$$

wesentliche Vereinfachung der Ausdrücke herbei.

295 ([516] b. m. [523]). Bei einer Luftpumpe sind die Räume anfänglich mit der Luft von der Expansivkraft der umgebenden Luft = 760 mm gefüllt. Die Inhalte der wesentlichen Theile beim Versuch sind:

Recipient	3200	cbcm.
Canal	1.44	„
Hahnbohrung (in letzter Figur sichtbar) .	0.16	„
schädlicher Raum	0.048	„
Raum zwischen Cylinderboden und unterer Kolbenfläche (excl. schädlichen Raum)	576	„

Wie gross ist die Expansivkraft der im Recipienten eingeschlossenen Luft nach

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 40,\ \infty$$

Kolbenaufzügen?

296. Das feste, mit Quecksilber füllbare Gefäss einer Quecksilberluftpumpe enthalte nach dem Sinken des Quecksilbers in demselben einen durch den Hahn abgeschlossenen luftleeren Raum von Q Kubikcentimeter Inhalt. Wenn nun der nach dem Recipienten führende Canal durch geeignete Drehung des Verbindungshahnes geöffnet wird, strömt die Luft in den leeren Raum des Stiefels ein; Canal und Recipient enthalten zusammengenommen R Kubikcentimeter Inhalt. Wiederholt man das Verfahren der Entleerung des Quecksilbergefässes an der Pumpe n Mal, wie gross ist die Dichtigkeit der Luft im Recipienten, wenn sie vor dem Auspumpen 1 war?

Ferner, wenn der gemeinschaftliche Inhalt R von Recipient und Canal beispielsweise gleich:

$$0.1\ Q \quad 0.2\ Q \quad 0.3\ Q \quad 0.4\ Q \quad 0.5\ Q$$
$$Q \quad 2\ Q \quad 3\ Q \quad 4\ Q \quad 5\ Q$$
$$\text{und } 10\ Q$$

ist, wie gross ist nach zehnmaliger Wiederholung der Operation die Dichtigkeit der Luft im Recipienten (zwei Decimalen), wenn sie vor dem Auspumpen 1 war?

Aërostatischer Auftrieb.

297. Wie viel (ganze) Milligramm Auftrieb erleidet ein Körper in der Luft, dessen absolutes Gewicht im leeren Raume 1 kg beträgt, wenn sein specifisches Gewicht 1, 2, 3 ... bis 22 beträgt und das specifische Gewicht der Luft

0.001293606

im Vergleich mit Wasser angenommen wird?

298. Ein Körper vom spec. Gew. $\triangle$ wird wie gewöhnlich in der Luft gewogen; man bedient sich dabei eines Gewichtssatzes, dessen Stücke aus einem und demselben Materiale vom specifischen Gewichte δ bestehen und findet, dass der Körper m Milligramme wiegt. Die Luft, in der die Wägung erfolgt, hat in Bezug auf Wasser das specifische Gewicht λ.

Welche Correction muss zu dem direct gefundenen Gewicht m addirt werden, damit durch diese Addition das Gewicht M des Körpers im luftleeren Raume erhalten wird?

Die Wage habe bei Abwägung des Körpers in der Luft für sein Gewicht genau 1 kg gegeben. Das spec. Gew. der Luft, verglichen mit Wasser, sei 0.0012.

Welche Correction in Milligrammen muss dem gefundenen Gewicht zugesetzt werden:

A. je nachdem des Körpers specifisches Gewicht

1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 22

betrug und das specifische Gewicht der Gewichte (Messing, Argentan) 8.5 war;

B. je nachdem das specifische Gewicht des Körpers

1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 22 und

das spec. Gew. der Gewichtsstücke (Platin) 22 betrug?

299 ([527. 528]). Wie viel (ganze) Kubikcentimeter Inhalt muss ein steigfähiger Ballon wenigstens besitzen, dessen Gewicht (leer) in der Luft

1.8 2.0 5.0 10.0 100.0

Gramm beträgt?

Von dem zur Füllung verwendeten Wasserstoffgas wiegt 1 cbm:

0.09003 kg;

von der atmosphärischen Luft

1.2991 kg.

300 ([529—532]). Wenn atmosphärischer Luft und Wasserstoffgas die am Schlusse voriger Aufgabe notirten specifischen Gewichte zukommen, werden Ballons von nachstehend aufgeführtem Gewicht

und Inhalt nach vollständiger Füllung mit Wasserstoffgas steigen oder sinken?

Gewicht g:	1.6	1.5	1.2
Inhalt cbcm:	1404.6	1229.0	1100.0
Gewicht g:	1.0		
Inhalt cbcm:	1000.0.		

301 (533). Wenn wiederum die am Schlusse der Aufgabe angeführten spec. Gew. für Luft und Wasserstoff gelten:

Wie viel Gramm ist der resultirende Druck nach oben, den ein Ballon von 2 g Gewicht und 8181.2 cbcm Inhalt erleidet nach vollständiger Füllung?

(534). Bei einem Ballon von 15 m Halbmesser (Kugelform!) und 400 kg Gewicht wird gefragt:

Wie gross ist die Masse des vollständig mit Wasserstoff gefüllten Ballons,

1 cbm Wasserstoff = 0.15 kg,
1 cbm Luft = 1.25 kg,
g = 9.8088 m;

wie viel Kilo beträgt der resultirende Auftrieb, und wie viel Meter die von demselben dem Ballon (abgesehen vom Luftwiderstande) ertheilte Beschleunigung?

Druck der Luft in einer unendlich hohen, cylindrischen Röhre.

302. Wie viel kg beträgt bei einem Barometerstande bei 0° C. von 760 mm der Druck der Luft auf eine horizontale Fläche von 1 qm Inhalt, wenn in Beziehung auf Wasser von 4° C das specifische Gewicht

von Luft: 0.001293606
„ Quecksilber: 13.596

beträgt, und wie gross ist der Druck auf eine gleich grosse, 1 m höher gelegene Fläche, wenn angenommen wird, dass der Druck innerhalb der zwischen beiden Flächen stehenden, 1 m hohen Luftschicht überall derselbe ist?

303. Eine in der Atmosphäre vom Boden aus sich erhebende, abgegrenzte cylindrische und ruhige Luftsäule von 1 qm Querschnitt übt auf die Bodenfläche den Druck P_0 (in Kilogrammen) aus. Wie gross ist der auf die gleiche Fläche in n Metern Höhe von der Luft hervorgebrachte Druck, ausgedrückt in dem Drucke auf die Bodenfläche P_0 und in dem Drucke P_1 auf eine ihr parallele, 1 m höher gelegene Horizontalschicht?

304. Wie viel (ganze) kg beträgt der Druck auf 1 qm horizontale Fläche

in: 200 400 600 800 1000 m

Höhe über der Erdoberfläche, wenn an letzterer der Luftdruck bei 0^0 Temperatur 760 mm ist und die specifischen Gewichte

der Luft von 0^0 und 760 mm: 0.001293606

des Quecksilbers von 0^0: 13.59593

betragen?

Wie viel mm hoch wird das Barometer unter den gegebenen Verhältnissen in den genannten Höhen stehen?

In wie viel m Höhe über dem Horizonte zeigt das Barometer einen Luftdruck von:

mm: 750 740 730 720 710?

II. Abtheilung.

Wellenlehre und Akustik.

Schwingungen eines Punktes und Wellenbewegung.

1. Wenn ein aus seiner Gleichgewichtslage um das Stück y abgelenkter Punkt mit der Kraft ky (k eine Constante) wieder in dieselbe zurückgezogen wird, so gelten für Ablenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung die Ausdrücke (α = Amplitude):

$$y = \alpha \sin \sqrt{k} \,.\, t;\; v = \alpha \sqrt{k} \cos \sqrt{k}\, t;\; \gamma = -\alpha k \sin \sqrt{k}\, t.$$

Welche Werthe erlangen, wenn man mit T die Dauer einer ganzen Schwingung bezeichnet, Ablenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung nach Ablauf der Zeiten:

$$\frac{4n+1}{4} T, \quad \frac{4n+2}{4} T, \quad \frac{4n+3}{4} T, \quad \frac{4n+4}{4} T?$$

2. Ein von seiner Gleichgewichtslage um das Stück y abgelenkter Massenpunkt wird zwar durch Molecularkräfte mit der (auf die Masse 1) wirkenden, beschleunigenden Kraft ky zurückgezogen, erfährt aber bei der Bewegung einen Widerstand von der Grösse $2\varepsilon v$ ($\varepsilon > 0$). Für Ablenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung gelten hierauf folgende Ausdrücke, in denen A die Amplitude bedeutet:

$$y = A e^{-\varepsilon t} \sin t \sqrt{k - \varepsilon^2}$$
$$v = -A e^{-\varepsilon t} \{\varepsilon \sin t \sqrt{k - \varepsilon^2} - \sqrt{k - \varepsilon^2} \cos t \sqrt{k - \varepsilon^2}\}$$
$$\gamma = -ky - 2\varepsilon v.$$

Welche Form nimmt der Ausdruck für den Abstand y durch Einführung von T der Dauer einer Schwingung und von $q = e^{-\frac{\varepsilon T}{2}}$ an, und wie gross ist hierauf y nach Ablauf der Zeiten:

$$t = \frac{4n+1}{4} T \qquad \frac{4n+2}{4} T \qquad \frac{4n+3}{4} T \qquad \frac{4n+4}{4} T?$$

3. Ablenkung und Geschwindigkeit eines Erschütterungsmittelpunktes für fortschreitende Wellenbewegung sind:

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$v = \frac{2\pi\alpha}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Bei der Ausbreitung der Wellenbewegung von dem Mittelpunkte aus sei λ die Wellenlänge; durch welche Gleichungen ist y und v für Punkte gegeben, die vom Erschütterungsmittelpunkt die Entfernung:

$$\frac{4n\lambda}{4}, \quad \frac{(4n+1)\lambda}{4}, \quad \frac{(4n+2)\lambda}{4}, \quad \frac{(4n+3)\lambda}{4}, \quad \frac{(4n+4)\lambda}{4} \quad x$$

haben?

4. Interferenz zweier in gleicher Richtung sich ausbreitender Wellenbewegungen (transversal oder longitudinal) von der Länge λ. Zwei Erschütterungsmittelpunkte A und B haben die Entfernung $AB = a$. Die Gleichung der Bewegung ist

$$\text{in } A\text{: } y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\text{in } B\text{: } y' = \alpha' \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Durch welche Gleichung wird der Bewegungszustand eines Punktes bestimmt, welcher auf der verlängerten Geraden AB von A in der Richtung über B hinaus um x, d. i. also von B um $x - a$ entfernt ist, im Allgemeinen und wenn a die Werthe:

$$\frac{4n\lambda}{4}, \quad \frac{4n+1\lambda}{4}, \quad \frac{4n+2\lambda}{4}, \quad \frac{4n+3\lambda}{4}, \quad \frac{4n\lambda}{4}.$$

hat?

5. Interferenz zweier in entgegengesetzter Richtung sich ausbreitender Wellenbewegungen von gleicher Länge und gleicher Amplitude α. Schwingungen transversal oder longitudinal.

Die Erschütterungsmittelpunkte der Wellenbewegung A und B haben die Entfernung $AB = a$ von einander, die Bewegung ist in A, sowie in B durch $y = \alpha \sin \frac{2\pi t}{T}$ gegeben. Ein Punkt C, welcher auf der Geraden AB in der Entfernung x von A, demnach in der Entfernung $a - x$ von B liegt, erhält von A und B gleichzeitig

Impulse; es wird die resultirende Gleichung der Bewegung im Punkte C und speciell für:

$$a = 2n\lambda, \ (2n+\tfrac{1}{2})\lambda, \ (2n+1)\lambda, \ (2n+\tfrac{3}{2})\lambda,$$

sowie der Abstand von zwei Nachbarschwingungsknoten gesucht.

6. Eine geradlinig fortgepflanzte Wellenbewegung, welche einem in der Entfernung x vom Ausgangsorte gelegenen Punkte die Ablenkung $y = \alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ ertheilt, ist durch zwei Wellenbewegungen zu ersetzen, welche an demselben Punkte einzeln die Ablenkungen $\alpha \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right]$ und $\alpha \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda}\right]$ hervorbringen würden.

Bei welchem Werthe von d findet der Ersatz der einen Wellenbewegung durch die zwei Wellenbewegungen mit dem Gangunterschiede $2d$ wirklich statt?

7. Zwei unter sich normale transversale Wellenbewegungen wirken zugleich auf einen Punkt ein. Die eine allein würde die Ablenkung $y = \alpha \sin 2\frac{\pi t}{T}$, die andere allein die Ablenkung $y' = \alpha' \sin 2\frac{\pi t}{T}$ ertheilen.

Es ist die Gleichung der resultirenden Bewegung und der Winkel ω zu bestimmen, welche ihre Bahn mit der Bahn der Bewegung y einschliesst.

8. Die transversalschwingende Bewegung $y = \alpha \sin 2\pi\frac{t}{T}$ eines Wellenmittelpunktes ist durch zwei dergleichen Bewegungen zu ersetzen, deren Ablenkungen resp. die Winkel φ und $\frac{\pi}{2} - \varphi$ mit der Ablenkungsrichtung y bilden. Durch welche Gleichungen werden die componirenden Bewegungen bestimmt?

9. Zwei Erschütterungsmittelpunkte A und B senden Wellen aus und schwingen transversal resp. nach den Bewegungsgleichungen $y = \alpha \sin 2\pi\frac{t}{T}$ und $z = \beta \sin 2\pi\frac{t}{T}$. Ein Beobachter, der in der Ausbreitungsrichtung, d. i. in der Verlängerung von AB über B hinaus sein Auge placirt, sieht die Ausschläge von B horizontal in der Richtung von links nach rechts beginnen, die Ausschläge von A vertical in der Richtung von unten nach oben; man muss sich also,

um von der positiven z-Richtung nach der positiven y-Richtung zu gelangen, von rechts nach links wenden. Ein Punkt C, der im Gleichgewichtszustande von A aus gerechnet auf der verlängerten Geraden AB über B hinaus liegt und von A die Entfernung x, von B die Entfernung $x-a$ hat, wird gleichzeitig durch Fortpflanzung der Wellen von A und von B aus abgelenkt. Welche Bahn beschreibt der Punkt C und in welchem Sinne, sobald es eine geschlossene Curve ist, wenn man für a die Werthe:

$$\tfrac{1}{8}\lambda,\ \tfrac{2}{8}\lambda,\ \tfrac{3}{8}\lambda \ldots \tfrac{8}{8}\lambda$$

annimmt?

10. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c von Longitudinalwellen in Körpern ist mittelst der Formel:

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}}$$

zu berechnen, in welcher E eine nachfolgend genauer definirte Grösse bedeutet, durch welche die Elasticität des Körpers ausgedrückt wird und d die Dichtigkeit der Längeneinheit ist.

A. Bei prismatischen Stäben ist E der Elasticitätsmodulus, d. i. das Gewicht in kg, welches unter der Voraussetzung, dass die Elasticitätsgrenze noch nicht überschritten wäre, einen Stab von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge durch Zug in der Längsrichtung um 1 m ausdehnen würde; d ist das Gewicht des Stabes von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge in kg, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere $g = 9.81$ m.

Wie gross ist die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in:

1) Gusseisen, da ein gusseiserner Stab von einem preussischen Quadratzoll Querschnitt durch ein Gewicht von 15.9×10^6 preussischen Pfunden auf die doppelte Länge ausgezogen werden würde, wenn die Elasticität so weit reichte.

1 preuss. Fuss = 313.8535 mm
1 „ Pfund = 467.711 g
Specifisches Gewicht des Gusseisens = 7.6.

2) Blei (gezogen) $E = 1883$ kg. Spec. Gew. 11.16
3) Zink „ $E = 8734$ „ „ „ 7.008
4) Kupfer „ $E = 12449$ „ „ „ 8.93
5) Eisen „ $E = 20869$ „ „ „ 7.74
6) Gussstahl „ $E = 19549$ „ „ „ 7.71.

B. Bei Flüssigkeiten bedeutet E den Druck in Kilogrammen, welchen man auf die Oberfläche einer in einem prismatischen, voll-

kommen unausdehnbaren Gefäss von beliebigem Querschnitt q enthaltenen Flüssigkeitsschicht von 1 m Höhe wirken lassen müsste, um die Flüssigkeit bis zum Volumen Null zusammenzudrücken; d ist das Gewicht der genannten Flüssigkeitsschicht in kg, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere $g = 9.81$ m.

Wie gross ist die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in folgenden Flüssigkeiten, für welche die Compressibilität, d. i. die Verminderung des Volumens 1 durch den Druck einer Atmosphäre, sowie das specifische Gewicht gegeben ist?

	7) Meereswasser (20° C).	8) Seinewasser (15° C).
Compressibilität:	0.0000467	0.0000491
Spec. Gewicht:	1.0264	0.9996

Specifisches Gewicht von Quecksilber = 13.596.

C. Bei Gasen bedeutet E, da Elasticität und Druck einander gleich sind, den Druck in kg, unter welchem eine prismatische Luftschicht von beliebigem Querschnitt und 1 m Höhe steht; d ist das Gewicht derselben Luftschicht in kg, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere $g = 9.81$ m.

Der allgemeine Ausdruck ist für Gase wegen der mit dem Durchgange der Wellen verbundenen, örtlichen Aenderung der Wärme und in Folge dessen der Elasticität mit einem Factor k zu multipli ciren, so dass

$$c = k\sqrt{\frac{E}{d}}$$

wird.

Wie gross ist c für atmosphärische Luft von 0° und 760 mm Druck, da das spec. Gewicht unter diesen Verhältnissen 0.0012936, das des Quecksilbers 13.596 und $k = \sqrt{1.4}$ beträgt?

11. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen in gespannten Schnüren erhält man durch Berechnung aus dem Ausdruck:

$$c = \sqrt{\frac{P}{p}\,g}.$$

P ist das spannende Gewicht in Grammen;

p das Gewicht eines 1 m langen Stückes der Schnur in Grammen;

g die Beschleunigung der Schwere = 9.81 m.

Bei den Versuchen der Gebrüder Weber über Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen in dünnen Schnüren wog 1 m

Schnur = 3165.2 mg. Wie gross ist hiernach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei den angewandten Spannungsgewichten:

1.	2.	3.
610.5 g	2027.5 g	4226.4 g?

Fortpflanzung des Schalles in der Luft und anderen Medien.

12. Einen Stein, den man vom Rande eines Schachtes aus in selbigen frei herabfallen lässt, hört man t Sekunden nach Beginn des Falles auf den Boden des Schachtes aufschlagen. Welche Ausdrücke ergeben die Tiefe x des Schachtes, sowie die wirkliche Fallzeit T des Steines, wenn mit c die Geschwindigkeit des Schalles, mit g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet wird?

Wie viel Meter Tiefe hat der Schacht, wenn die wirklich beobachtete (scheinbare) Fallzeit:

1.75 3.50 5.25 7.00 8.75

Sekunden betrug?

13. Das menschliche Ohr vermag in der Sekunde zehn Laute deutlich zu vernehmen. Wie weit muss eine Echo gebende Wand von dem Rufenden entfernt sein, damit ein dreisilbiges Wort unmittelbar oder eine, zwei, drei, vier Sekunden nach dem Ausrufen als Echo gehört wird? Schallgeschwindigkeit (in Sommerwärme) = 350 m.

14. Eine Schallquelle giebt in einer Sekunde in gleichen Zwischenräumen zehn deutlich hörbare kurze Anschläge, die Geschwindigkeit des Schalles beträgt 350 m. Wie gross ist für einen Beobachter das scheinbare Intervall zwischen je zwei auf einander folgenden Anschlägen:

A. Wenn sich der Beobachter mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von:

3.5 7.0 10.5 14.0 17.5 Meter

nach der ruhenden Schallquelle hin

oder von der ruhenden Schallquelle hinweg bewegt?

B. Wenn die Schallwelle mit der Geschwindigkeit:

3.5 7.0 10.5 14.0 17.5 Meter

nach dem ruhenden Beobachter hin

oder von dem ruhenden Beobachter hinweg bewegt wird?

C. Wenn sich Schallquelle und Beobachter beide mit der gleichen Geschwindigkeit von:

3.5 7.0 10.5 14.0 17.5 Meter

nach einander hin

oder von einander weg bewegen?

15. An einem Ende einer 700 m langen Röhrenleitung findet Schallerregung statt. Der Schall pflanzt sich theils durch die Luft in der Röhre mit 350 m Geschwindigkeit, theils durch das Metall der Röhre fort. Ein Beobachter an dem der Schallerregung entgegengesetztem Röhrenende empfindet zwei Schalleindrücke, zuerst den durch das Metall, später den durch die Luft fortgepflanzten Schall. Wie gross ist das Zeitintervall zwischen beiden Eindrücken, je nachdem die Röhrenleitung aus einem der folgenden Metalle hergestellt ist, in welchem die Schallgeschwindigkeit (abgerundet) der beigesetzten Zahl entspricht, wenn sie in atmosphärischer Luft = 1 angenommen wird?

Blei.	Zinn.	Zink.	Eisen.
$4\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	11	15.

Tönende Wellen in der Luft.

16. Die in der Musik angewandten Töne liegen zwischen den Octaven: C_1 C c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5.

Wie viel mm betragen die Wellenlängen der eben genannten Töne in der Luft, je nachdem die Schallgeschwindigkeit v:

bei starker (350 m) und geringer Luftwärme (340 m)

angenommen wird; ferner, wenn der Rückgang von a_1 auf c_1 nach den Verhältnissen der gleichschwebenden Temperatur bewerkstelligt und wenn die Schwingungszahl 435 für a_1 gerechnet wird?

17. Wie verhalten sich die Schwingungszahlen der in einer Octave enthaltenen Töne, sobald der Anfangston c der Octave die Schwingungszahl 1 erhält und wenn man nach den Verhältnissen der gleichschwebenden Temperatur rechnet?

Welche gleichtemperirten Töne haben eine Wellenlänge von:

0.1 1 2 5 10 Meter

bei 340 m Schallgeschwindigkeit und $a_1 = 435$ Schwingungen pro Sekunde?

18. Der Umfang der menschlichen Stimme ist in der Regel:

Bass.	Tenor.	Alt.	Sopran.
E bis f_1	c bis h_2	f bis f_2	c_1 bis c_3.

Wie viel mm Wellenlänge hat hiernach der tiefste Ton der Männerstimme und der höchste Ton der Frauenstimme, sobald die Schallgeschwindigkeit 340 m und $a_1 = 435$ angenommen wird? (Gleichschwebende Temperatur).

19 ([40]). Die Wellenlängen von Tönen verhalten sich wie:

$$1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : \text{etc.} \ldots : \tfrac{1}{10}.$$

Welche Töne entsprechen diesen Wellenlängen am genauesten, wenn man den Ton mit der Wellenlänge 1 mit C bezeichnet, gleichschwebende Temperatur und $a_1 = 435$ annimmt?

Klänge durch Schwingungen fester, flüssiger und luftförmiger Körper.

20. Klänge durch Longitudinalschwingungen prismatischer Stäbe.

A. Werden Stäbe auf gleiche Weise befestigt oder gehalten und in Schwingungen versetzt, so ist die Anzahl N der Schwingungen eines Tones im Allgemeinen:

Stab an einem Ende fest, am andern frei $N = (2n - 1)\,\frac{c}{4l}$,

Stab an beiden Enden frei, in der Mitte locker gehalten $N = n\,\frac{c}{2l}$,

Stab an beiden Enden fest $N = \frac{n\,c}{2l}$.

Bei diesen Ausdrücken bedeutet:

n eine Zahl aus der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 . . .;

$c = \sqrt{\frac{E}{d}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in Stäben, zu berechnen aus

E dem Elasticitätscoëfficienten in kg, bezogen auf 1 qmm Querschnitt;

d dem Gewicht eines Stabes von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge in kg, dividirt durch $g = 9.81$ m.

l die Länge des Stabes in Metern.

Die Länge eines eisernen Stabes sei 1000 mm; wie viel (ganze) mm Länge müssen Stäbe aus Gussstahl, Kupfer, Silber, Zink besitzen, welche auf gleiche Weise gerieben, wie Eisen, denselben Grundton geben sollen, da die Elasticitätscoëfficienten und specifischen Gewichte der Metalle folgende Werthe haben?

	Eisen.	Gussstahl.	Kupfer.	Silber.	Zink.
E in kg:	20794	19561	10519	7140	8734
spec. Gew.:	7.74	7.9	8.78	10.47	7.86.

B. Welches sind nach gleichschwebender Temperatur die ersten fünf Töne der Tonreihe, welche ein Stab giebt,

wenn er am einen Ende fest, am andern frei ist,

wenn er an beiden Enden frei oder an beiden Enden fest ist.

Der tiefste Ton, den der Stab bei einer der genannten Behandlungsweisen giebt, sei c.

21. Die Tonreihe eines cylindrischen Stabes ist nach Seebeck u. A. durch die Zahlen gegeben, wenn der Stab transversal schwingt:

Ein Ende fest, das andere frei: 1 6.26 17.54 34.38 56.84;
beide Enden fest oder frei: 6.36 17.54 34.38 56.84 84.91;
ein Ende aufgelegt, das andere
Ende ganz fest oder frei: 4.38 14.21 29.50 50.70 77.22;
beide Enden aufgelegt: 2.807 11.23 25.26 44.91 70.17.

Die wirklichen Schwingungszahlen werden durch Multiplication der Zahlen der Tabelle

bei cylindrischen Stäben mit $\frac{0.35624 \times \pi \times r}{4 l^2} \sqrt{\frac{E}{d}}$,

bei parallelepipedischen Stäben mit $\frac{0.35624 \times \pi \times h}{4 l^2 \sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{d}}$

erhalten, wobei r den Radius, h die Dicke (nicht Breite), l die Länge des Stabes, E den Elasticitätsmodulus in kg auf 1 qmm bezogen, d das Gewicht eines Stabes von 1 qmm Querschnitt und 1 m Länge in kg, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere, bedeutet.

Welche Töne entsprechen nach den Verhältnissen der gleichschwebenden Temperatur den in der Tabelle angegebenen Schwingungszahlen, sobald der tiefste Ton mit C_1 bezeichnet wird?

22. Bei Transversalschwingungen von Saiten ist die Schwingungszahl im Allgemeinen:

$$N = n \frac{c}{2 l}.$$

n ist eine Zahl aus der natürlichen Zahlenreihe;

$c = \sqrt{\frac{P}{p} g}$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen in der Saite in m, wobei

P die Spannung der Saite in kg;

p das Gewicht eines 1 m langen Stückes der Saite in kg;

$g = 9.81$ m;

l ist die Saitenlänge in m.

Wenn nun eine Saite von 1 m Länge durch 1 kg gespannt wird, die Saite ein Mal von Eisendraht, spec. Gew. 7.7, ein anderes Mal von Messingdraht, spec. Gew. 8.5, genommen wird und in jedem Falle die Dicke der Saite in Millimetern:

0.1 0.2 0.3 0.4 0.5

beträgt.

Wie viel Meter ist die Fortpflanzungegeschwindigkeit der Transversalwellen in der Saite?

Welches sind die Schwingungszahlen des Grundtones der Saiten?

Welche Grundtöne geben die Saiten (gleichschwebende Temperatur und $a_1 = 435$ vorausgesetzt).

23. Wenn eine Wassersäule tönende Schwingungen in einer offenen Orgelpfeife macht, so ist die Schwingungszahl des Grundtones (abgesehen von den an der Länge anzubringenden Correctionen)

$$\frac{c}{2l},$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in Wasser bedeutet. Wenn nun diese Geschwindigkeit in Röhren nur $\sqrt{\frac{2}{9}}$ Mal so gross, als in freier Flüssigkeit (1425 m) ist; wie viel Schwingungen macht der Grundton pro Sekunde, wenn die Länge der Orgelpfeife 1 m beträgt?

24. Töne einerseits geschlossener Pfeifen geben die Schwingungszahlen im Allgemeinen und ohne auf die Längencorrection der schwingenden Luftsäule Bedacht zu nehmen:

$$N = (2n-1)\frac{c}{4l}$$

und offene Pfeifen:

$$N = \frac{nc}{2l}.$$

n eine Zahl der natürlichen Zahlenreihe;

c Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in dem die Röhre füllenden Gase;

l Länge der Pfeife.

Enthält die Pfeife atmosphärische Luft ($c = 340$ m) und besitzt sie 0.85 m Länge; welche Schwingungszahlen haben dann die ersten fünf Töne der gedeckten und der offenen Pfeife?

25. Die Grundtöne gedeckter und offener Pfeifen haben folgende Schwingungszahlen:

gedeckte Pfeifen $N = \frac{c}{4(L+x)}$,

offene Pfeifen $N = \frac{c}{2(L+x+y)}$.

L Länge der in der Pfeife eingeschlossenen Luftsäule;

c Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in freier Luft;

x Längencorrection an der Luftsäule wegen des Mundstücks;

y Längencorrection an der Luftsäule wegen Verlängerung der schwingenden Säule über die obere Pfeifenöffnung hinaus.

Wie viel Schwingungen machen die Grundtöne bei einer gedeckten oder offenen Pfeife von 0.85 m Länge, $c = 340$ m, wenn die Correctionen

$$x = 40 \text{ mm}$$
$$x + y = 60 \text{ mm}$$

sind, und welches sind die erzeugten Grundtöne ohne und mit Correctionen?

26 ([25] b. [29]). Eine Pfeife giebt nach der Füllung mit atmosphärischer Luft beim Anblasen $c = 129.33$. Welche temperirte Töne würde sie nach der Füllung mit folgenden Gasarten geben, deren Namen die Zahl zugefügt ist, welche angiebt, wie viel Mal grösser die Geschwindigkeit des Schalles in dem Gase ist, als in atmosphärischer Luft:

Kohlensäure.	ölbildendes Gas.	Sauerstoff.	Kohlenoxydgas.	Wasserstoff.
0.786	0.943	0.952	1.013	3.812.

27. Die Entfernung zweier Nachbarschwingungsknoten in einer schwingenden Gassäule ist genau gleich einer halben fortschreitenden Welle im Gase oder einer ganzen stehenden Welle in demselben.

Genau dasselbe gilt für einen Stab, der in der Mitte festgehalten und an den Enden frei, Longitudinalschwingungen macht und dabei den Grundton giebt.

Bei dem Kundt'schen Versuche wird die Gassäule durch den erregenden Stab in isochronische Schwingungen versetzt; wenn dabei die Länge der Stabwelle gleich l in der Luft, h in einem andern Gase gefunden wird, und wenn L die Länge des erregenden Stabes und c die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft ist.

Wie gross ist die Geschwindigkeit C des Schalles in dem Stabe?

Wie gross ist die Geschwindigkeit x des Schalles in dem Gase?

Differenztöne, Summationstöne, Stösse.

28 ([41] b. [45]). Welche Schwingungszahlen kommen den Differenztönen erster und zweiter Ordnung, sowie den Summationstönen erster Ordnung folgender (nach der diatonischen Tonleiter abgestimmter) primärer Töne zu und welches sind die genannten Differenz- und Summationstöne selbst, wenn man sie nach gleichschwebender Temperatur aus ihren Schwingungszahlen berechnet:

$c_1\ d_1$	$c_2\ e_2$	$c_2\ a_2$	$h_1\ d_3$	$h_1\ c_2$
8 : 9	4 : 5	3 : 5	5 : 12	3 : 4?

29 ([48]). Welchen Tönen nach gleichschwebender Temperatur entsprechen die Differenztöne dritter Ordnung von

$$c_2 = 512 \quad h_2 = 960$$

Schwingungen, wenn bei der Ausrechnung von c_2' ausgangen wird?

30 ([49. 50]). Jede Gruppe der Töne von den Schwingungsmengen 220, 277, 329; sowie 200, 252, 300 giebt beim gleichzeitigen Anblasen drei Combinationstöne erster Ordnung. Je zwei von den letztern, die von einer Gruppe primärer Töne herrühren, geben beim Zusammenklingen Stösse. Wie viel Stösse müssen gehört werden?

31 ([51]). An einem Monochord gab ein Stück Saite von der Länge 1 denselben Ton, als eine a_1-Gabel, ein Stück Saite von der Länge 1.0091 gab mit der a_1-Gabel 4 Stösse pro Sekunde.

Wie viel Schwingungen pro Sekunde macht hiernach die a_1 Gabel?

32 ([52]). Zwei Saiten von gleichem Materiale und Querschnitt sollen nebeneinander (gleichgespannt) am Monochord aufgezogen pro Sekunde zwei Stösse geben. Welche Länge l_1 muss die eine Saite besitzen, da die andere von der Länge l pro Sekunde 440 Schwingungen macht?

III. Abtheilung.

Optik.

Geradlinige Bewegung, Geschwindigkeit und Intensität des Lichtes.

1. Wie viel (ganze) Millimeter beträgt die Länge des Schattens eines senkrecht auf der Erdoberfläche stehenden Stabes von der Länge eines Erwachsenen (incl. Kopfbedeckung $= 1\frac{3}{4}$ m) bei folgender Sonnenhöhe:

	Südgrenze v. Deutschl.	Mittel-Deutschl.	Nordgrenze v. Deutschl.	Aequator.
Kleinste Mittagssonnenhöhe:	20.5^0	15.5^0	10.5^0	66.5^0
Grösste Mittagssonnenhöhe:	67.5^0	62.5^0	57.5^0	90.0^0 ?

2. Wie viel Meter lang (nur eine Decimale) ist der Schatten eines 20 m hohen Baumes bei folgenden Sonnenhöhen:

Grad: 10 15 20 25 30?

3. Die Höhe eines Baumes ist aus Folgendem zu berechnen:

Sonnenhöhe, Grad:	35	40	45	50	55
Schattenlänge, Meter:	28.6	23.8	20.0	16.8	14.0.

4. Wie viel (ganze) Grade beträgt die Höhe der Sonne, wenn ein senkrecht auf dem Erdboden aufgestellter Stab von 1 m Länge einen Schatten von der Länge:

0.7 m 0.9 m 1.0 m 1.6 m

wirft?

5. Aus dem nachfolgend gegebenen Radius R einer leuchtenden Kugel, Radius r einer dunkeln Kugel, Mittelpunktsentfernung e beider Kugeln, ist zu berechnen:

die Entfernung d der Spitze des Kernschattens von der Mitte der dunkeln Kugel;

die Entfernung l der Spitze des Kernschattens von der Mitte der leuchtenden Kugel.

R in cm:	11	22	102	R
r in cm:	1	2	1	r
e in cm:	100	100	1000	e.

6. *A.* Die Längsrichtung einer geradlinigen Mauer von h Meter Höhe, welche auf horizontalem Boden steht, ist rechtwinklig gegen die Perpendikularebene der von der Sonnenmitte kommenden Strahlen. Die (auf die letzteren sich beziehende) Sonnenhöhe ist β, der scheinbare Durchmesser der Sonne hat den sehr kleinen Winkelwerth $\triangle$.

Es ist angenähert zu berechnen:

der Abstand des Kernschattenendes der Mauer von der Horizontalprojection der schattengebenden Kante;

der Abstand der Halbschattenendes der Mauer von der Horizontalprojection der schattengebenden Kante;

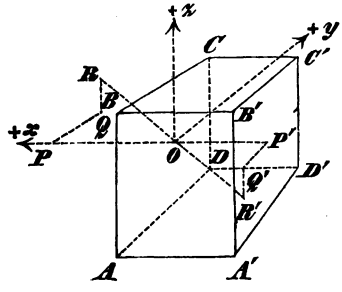
die Länge des Halbschattens.

B. Die Mauer liegt gegen die einfallenden Sonnenstrahlen, wie unter A. beschrieben worden; die Halbschattenlänge ist für Sonnenhöhen von:

$$20^0 \quad 30^0 \quad 40^0 \quad 50^0 \quad 60^0$$

zu berechnen und dabei der scheinbare Durchmesser der Sonne 32′ 3.3″ zu berücksichtigen, sowie die Mauerhöhe 10 m anzunehmen.

Fig. 8.



7. Die der Hinterwand $A'\,B'\,C'\,D'$ einer dunkeln Kammer parallele Vorderwand $A\,B\,C\,D$ enthält eine sehr kleine Oeffnung O. Der Abstand beider (perpendikularen) Wände = 10 m.

In den Mittelpunkt der Oeffnung O wird ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen

x-Axe horizontal und rechtwinklig auf der Vorderwand ist;

y-Axe horizontal ist und in der Vorderwand liegt;

z-Axe perpendikular ist,

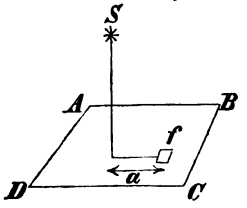
und deren positive Richtungen im Uebrigen aus der Figur hervorgehen.

Aus den in folgender Tabelle in m angegebenen Coordinaten von leuchtenden Punkten sind die Coordinaten von deren optischen Bildern zu ermitteln.

	1.	2.	3 (3).	4 (4).	5 (5).
$x =$	100	100	100	200	300
$y =$	200	-100	50	-50	-100
$z =$	50	$+5$	25	-25	$+50$.

8. In einer Horizontalebene $ABCD$ (Fig. 9) liegt eine sehr kleine Fläche f, welche vom leuchtenden Punkt S erhellt werden soll. Derselbe würde bei senkrechtem Einfallen der Lichtstrahlen und wenn er sich in der senkrechten Entfernung a gerade über der kleinen Fläche f befände, die Lichtmenge 1000 an die Fläche f abgeben.

Fig. 9.



Wie gross ist die Helligkeit von f, wenn diese Fläche die horizontale Entfernung a von der Horizontalprojection von S besitzt und sich dabei in folgenden Tiefen unter dem leuchtenden Punkt befindet:

$$0 \quad \frac{a}{2} \quad \frac{a}{\sqrt{2}} \quad a \quad a\sqrt{2} \quad a\sqrt{3}?$$

9 (22). Wie hoch ist der leuchtende Punkt (Aufgabe 8, Fig. 9) bei constanter, horizontaler Entfernung a seiner Horizontalprojection von der sehr kleinen Fläche f über die Horizontalebene zu stellen, damit die Helligkeit der Fläche f ein Maximum werde?

10. Ein Papierschirm mit Stearinfleck zu photometrischen Zwecken, erhält Licht von einer vor und von einer hinter dem Schirme befindlichen Kerze, wobei die Strahlen in der Nähe des Stearinfleckes nahezu rechtwinklig auf den Schirm fallen.

Es ist die Lichtmenge zu berechnen, die von 1 qcm
des ungetränkten Papieres,
des Stearinfleckes
in ein Auge gesendet wird, welches dem Stearinfleck gerade gegenüber vor dem Schirme aufgestellt ist. Es werden dabei folgende Annahmen gemacht (die Intensität der Kerzen immer auf 1 dcm Entfernung von der erleuchteten Flächeneinheit = 1 qdcm bezogen):

A. Intensität der Kerze vor dem Schirm: 40000
„ „ „ hinter dem Schirm: 10000
Entfernungen vom Schirme,

der Kerze vor dem Schirm: 2 3 4 5 6 dcm
„ „ hinter dem Schirm: 2 2 2 2 2 dcm.

Von der auf 1 qcm des Schirmes fallenden Lichtmenge 1 wird

	durchgelassen	reflectirt
vom Papier:	0.01	0.99
vom Fleck:	0.10	0.90.

B. Intensitäten und Entfernungen der Kerzen, wie sub A; von der auf 1 qcm des Schirmes fallenden Lichtmenge aber wird

	durchgelassen	reflectirt
vom Papier:	0.01	0.99
vom Fleck:	0.50	0.50.

C. Intensität der Kerze vor dem Schirm . . . . J
Entfernung vom Schirm der Kerze vor dem Schirm D
Intensität der Kerze hinter dem Schirm . . . J'
Entfernung v. Schirm der Kerze hinter dem Schirm D'.

Von der auf 1 qcm des Schirmes fallenden Lichtmenge 1 wird

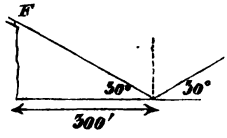
	durchgelassen	reflectirt
vom Papier:	d	$1 - d$
vom Fleck:	δ	$1 - \delta$.

11. Bei einem Rumford'schen Photometer denke man sich drei Lichter von den Intensitäten J, J_1 J_2 resp. in den Entfernungen vom Schirme D, D_1, D_2 aufgestellt, wobei die Lichter resp. die Schatten S, S_1 und S_2 erzeugen mögen.

Welches Verhältniss der Intensitäten $J : J_1 : J_2$ muss stattfinden, wenn jeder der drei Schatten gleich hell erscheinen soll?

Spiegelung des Lichtes.

Fig. 10.



12 ([23]). Ein Beobachter (Höhe des Auges über dem Fussboden = 1.5 m) sieht von einem Felsenvorsprunge aus das Bild der Sonne bei 30^0 Sonnenhöhe in einer kleinen Wasseransammlung auf dem tieferliegenden Terrain (Fig. 10). Wie viel ganze Meter hoch ist der Fels, wenn der Horizontalabstand des Beobachters vom spiegelnden Wasser zu:

100 m 200 m 300 m 400 m 500 m

angenommen wird?

13. Ein ebener Spiegel steht senkrecht auf horizontaler Ebene; vor ihm befindet sich ein leuchtender Punkt in der horizontalen

Entfernung d vom Spiegel und in der Entfernung h von der Horizontalebene.

A. Wie gross ist die Senkung, welche das optische Bild des leuchtenden Punktes erleidet, wenn der Spiegel um seinen Durchschnitt mit der Horizontalebene, um die sehr kleinen Winkel:

$$1'' \quad 1' \quad 1^0 \quad \alpha$$

nach hinten (vom leuchtenden Punkte hinweg) gedreht wird?

B. Wie gross ist die Hebung des Bildes, wenn die Drehung des Spiegels um den Durchschnitt mit der Horizontalebene, um die unter A. genannten Winkelwerthe nicht nach hinten, sondern nach vorn, nach dem leuchtenden Punkte zu erfolgt?

C. Wie viel ganze Meter hat die Entfernung des leuchtenden Punktes vom Spiegel zu betragen, wenn eine Neigungsveränderung des Spiegels um 1^0, $1'$, $1''$ eine Veränderung der Bildhöhe um 1 m hervorbringen soll?

14. Eine ebene spiegelnde Fläche ist perpendikular auf horizontaler Grundfläche aufgestellt und drehbar um eine in ihr liegende, ebenfalls perpendikular stehende Axe. Der Spiegelfläche gegenüber, ihr parallel, ist eine Scala von geringer Höhe aufgestellt, die Theilstriche sind vertikal, der Nullpunkt liegt in der Mitte, so dass die beiden Flügel der stabförmigen Scala gleich lang sind. Ein von der Umdrehungsaxe des Spiegels auf die Scala gezogenes Perpendikel muss nach dem Bisherigen horizontal sein und trifft die Scala im Nullpunkt; dieses Perpendikel heisse die optische Axe des Spiegels.

Wie viel mm ist der Scalentheil vom Mittelpunkt der Scala entfernt, den ein in Richtung der optischen Axe nach dem Spiegel sehendes Auge erblickt, nachdem folgende Drehungen des Spiegels nach rechts oder nach links vorgenommen worden sind:

A. der Spiegel, dessen Entfernung von der Scala d Millimeter betrug, ist um den sehr kleinen Winkel α gedreht worden;

B. der Spiegel, dessen Entfernung von der Scala:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \text{ m}$$

betrug, ist um 1 Grad, resp. 1 Miuute gedreht worden;

C. der Spiegel dessen Entfernung von der Scala:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \text{ m}$$

betrug, ist um 5 Grad gedreht worden?

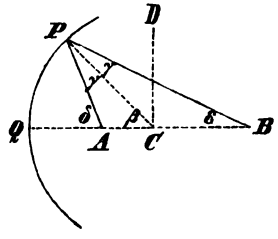
15 ([25]). Auf einer Horizontalebene steht ein Beobachter, dessen Auge die Höhe h über der Ebene hat, in der Entfernung D hinter

dem Beobachter ein perpendikularer Gegenstand von der Höhe H (Stange etc.).

Wie hoch muss ein in die Entfernung d vor das Auge des Beobachters gebrachter, in geeigneter Höhe perpendikular aufgestellter Spiegel wenigstens sein, damit der Beobachter das Bild des Gegenstandes von der Höhe H im Spiegel vollständig erblickt?

Wie hoch muss der Spiegel ferner wenigstens sein, damit der Beobachter sein eignes Bild von der Höhe a im Spiegel erblickt?

Fig. 11.



16 ([26]). Fig. 11 stellt einen Axenschnitt eines sphärischen Hohlspiegels vor. Der leuchtende Punkt B in der Axe sendet einen Strahl nach P, welcher nach A reflectirt wird.

A. Es ist $QA = \alpha$ auszudrücken in $QC = 2p$, $QB = a$, $\angle PCQ = \beta$; ausser dem genauen Ausdruck für α ist ein Näherungsausdruck aufzustellen, welcher durch Einsetzung der Näherungswerthe:

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{6}$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}.$$

in dem genauen Ausdruck erhalten wird und eine höhere Potenz von β, als dritte, nicht enthalten darf.

B. Es ist $QA = \alpha$ für einen einfallenden, zur Axe parallelen Strahl zu bestimmen und auszudrücken in $QC = 2p$ und $\angle PCQ = \beta$; es ist ebenfalls nicht nur der genaue Ausdruck anzugeben, sondern auch der durch Anwendung der unter A angeführten Näherungswerthe für $\sin\beta$ und $\cos\beta$ zu erhaltende angenäherte Ausdruck für α.

17. Unter Längenabweichung versteht man die auf der Axe eines sphärischen Spiegels gemessene Entfernung des Brennpunktes der Centralstrahlen und Randstrahlen. Seitenabweichung ist der zur Axe senkrechte Abstand, in welchem die äussersten Randstrahlen nach der Spiegelung am Brennpunkte der Centralstrahlen vorübergehen.

A. Die Hauptbrennweite eines sphärischen Hohlspiegels für Centralstrahlen sei p. Wie gross ist Längen- und Seitenabweichung bei demselben für Parallelstrahlen zur Axe, wenn die Apertur des Spiegels (ganzer Centriwinkel) einen der folgenden Winkel annimmt:

10^0 20^0 30^0 40^0 50^0 60^0?

B. Welche Näherungsausdrücke ergeben sich für die Längen- und Seitenabweichung von Parallelstrahlen zur Axe, wenn die Näherungswerthe:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6},\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

benutzt werden und der Ausdruck in p, der Brennweite für Centralstrahlen und in β, der halben Apertur erfolgt?

18 ([29. 30]). Auf der Axe eines Hohlspiegels von sehr kleiner Apertur $\left(\text{so dass } \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}\right)$, dessen Hauptbrennweite resp. p und 5 dcm ist, soll ein leuchtender Punkt so placirt werden, dass sein nach dem Spiegel zu gelegenes Bild resp. um die gegebenen Grössen d oder 10 dcm von ihm absteht?

Welche Entfernungen muss der leuchtende Punkt und sein Bild hiernach vom optischen Mittelpunkte des Spiegels haben?

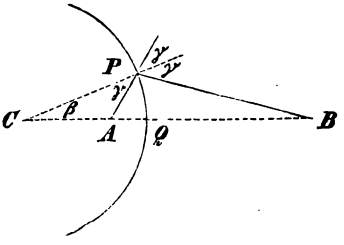
19 ([31—33]). Auf die Axe eines Hohlspiegels von sehr kleiner Apertur wird ein leuchtender Gegenstand in Form einer leuchtenden Linie (z. B. dünner Draht) senkrecht gestellt.

A. Wenn die Brennweite p ist, wie gross ist die Distanz vom optischen Mittelpunkt, in welche die leuchtende Linie zu bringen ist, damit ihr Bild $\frac{1}{n}$ Mal so lang als sie selbst ist $(n > o)$?

B. Wenn die Brennweite 10 dcm ist und die Bildhöhe soll $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ der Gegenstandshöhe betragen, in welche Entfernung vom optischen Mittelpunkt ist der Gegenstand zu stellen?

20 ([34]). Bei dem Axenschnitt des Convexspiegels Fig. 12 ist B ein leuchtender Punkt, der einen Strahl nach dem Punkte P des Spiegels sendet, welcher reflectirt wird, so dass er aus dem Punkte A der Axe zu kommen scheint.

Fig. 12.



A. Es ist $QA = \alpha$ zu bestimmen und auszudrücken in $QC = 2p$, $QB = a$ und $\angle PCQ = \beta$, der Werth von α ist einmal genau und das andre Mal mit Benutzung der Näherungswerthe?

$$\sin \beta = \beta - \tfrac{1}{6}\beta^3,\ \cos \beta = 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2$$

zu ermitteln.

B. Es ist für einen mit der Axe parallelen, einfallenden Strahl der Ausdruck für $QA = \alpha$ genau und nach Einführung der unter A angegebenen Näherungswerthe für *sin* und *cos* angenähert in $QC = 2p$ und $\angle PCQ = \beta$ zu bewerkstelligen.

C. Für Parallelstrahlen zur Axe ist Längen- und Seitenabweichung zu bestimmen:

Genau und angenähert (Näherungswerthe für *sin* und *cos* unter A benutzen), wenn die Hauptbrennweite für Centralstrahlen $= p$ und die halbe Apertur $= \beta$ gegeben ist.

D. Die Längen- und Seitenabweichung ist angenähert bei einer Hauptbrennweite $= p$ für Centralstrahlen und aus der gegebenen halben Apertur des Spiegels $= 5^0\ 43\frac{3}{4}'$ zu bestimmen.

21. Unterhalb der Axe eines Concavspiegels wird etwas ausserhalb der Brennweite ein Draht aufgehangen. Dieser würde ein Luftbild erzeugen, welches senkrecht auf der Axe stehen, sich über derselben befinden und von der Axe an gerechnet die Höhe b besitzen würde, wenn nicht das Zustandekommen des Bildes dadurch gestört würde, dass man einmal in die das Bild constituirenden Strahlen einen Concav-, das andere Mal einen Convexspiegel, beide von der Brennweite p, einschiebt, und zwar so, 1) dass die Axen der eingeschobenen Spiegel mit der Axe des das Bild erzeugenden Spiegels zusammenfallen, und 2) dass das Luftbild in der Entfernung $2p$ hinter den Spiegeln entstehen würde (wenn diese Einschiebespiegel den Gang der Strahlen eben nicht veränderten).

Es wird nun gefragt, an welcher Stelle der Axe der Einschiebespiegel entsteht das Bild und welche Grösse besitzt es (auszudrücken in b)?

22. Behufs Messung des Krümmungsradius eines Convex- oder Concavspiegels werden zwei Lichtflammen zu beiden Seiten von deren Axe so aufgestellt, dass die Verbindungsgerade (Länge L) beider Flammen die Axe rechtwinklig schneidet und von letzterer halbirt wird.

Ein im Halbirungspunkt der Flammendistanzlinie placirtes, nach dem Spiegel sehendes Auge erblickt die Flammenbilder auf die Spiegelflächen projectirt und erkennt mittelst eines dicht an die Spiegel gerückten Glasmassstabes, dass die Projection der Flammenbilderdistanz die Länge l hat.

Wie gross ist hiernach der Radius des Concav- und der Radius des Convexspiegels?

Brechung homogenen Lichtes beim Uebergang aus einem Mittel ins andere durch ebene Grenzflächen.

23. Ein leuchtender Punkt, welcher sich auf dem Boden einer mit Flüssigkeit gefüllten Schale befindet, sendet nach allen Seiten Strahlen aus. Die innerhalb eines gewissen Kegels an die Oberfläche gelangenden Strahlen werden zum Theile auch nach Aussen gebrochen, die ausserhalb des Kegels nach der Oberfläche gehenden Strahlen nur total reflectirt.

Welche Winkel schliesst die Erzeugende dieses Kegels mit der Axe bei folgenden Substanzen ein:

	Wasser.	Terpentinöl.	Schwefelkohlenstoff.
Brechungsexponent in runder Zahl:	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$1\frac{3}{8}$?

24. Ein leuchtender Punkt befindet sich auf dem Boden eines bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes. Wie gross erscheint einem perpendikular über den leuchtenden Punkt und über die Oberfläche der Flüssigkeit gestellten Auge die durch letztere bewirkte Hebung des leuchtenden Punktes?

Als Beispiele sind die Flüssigkeiten zu wählen:

	Wasser.	Terpentinöl.	Schwefelkohlenstoff.
Brechungsindex:	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$1\frac{3}{8}$.

25. Ein leuchtender Punkt wird durch ein perpendikular darüber gestelltes Auge betrachtet.

a) Wie gross ist die Distanz vom l. Punkt, in welcher dessen optisches Bild nach dem Einschub einer planparallelen Glasplatte (Dicke d, Brechungsindex n) zwischen Auge und Gegenstand erscheint? Die beiden ebenen Flächen der eingeschobenen Glasplatte sind horizontal, die untere Fläche hat die Entfernung h vom leuchtenden Punkte.

b) Wie viel mm beträgt die Hebung nach dem Einschub einer 10 mm dicken Glasplatte ($n = \frac{3}{2}$), deren ebene Flächen horizontal sind?

c) Die gemessene Hebung nach dem Einschub einer planparallelen Glasplatte (Dicke d) mit horizontalen Oberflächen beträgt v, wie gross ist der Brechungsindex n in d und v ausgedrückt?

26. Die Brechungsindices beim Uebertritt eines Strahles aus dem leeren Raum in folgende Substanzen sind:

Atmosphärische Luft.	Gewöhnliches Glas.	Wasser.
1.000294	1.530	1.336.

Wie gross sind hiernach die Brechungsindices beim Uebertritt von:

Luft in Glas; Luft in Wasser; Wasser in Glas?

27. Ein Lichtstrahl fällt auf eine durchsichtige planparallele Platte vom Brechungsindex n auf, wobei er mit dem Einfallsloth den Winkel α bildet.

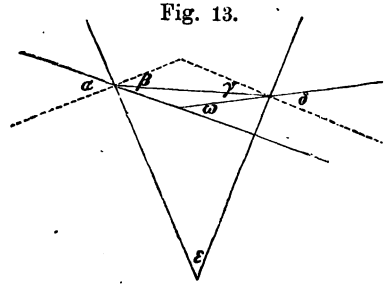
Wie gross ist die Verschiebung v des austretenden Strahles, d. h. der rechtwinklige Abstand zwischen eintretendem Strahl und rückwärtiger Verlängerung des austretenden Strahles genau und wie gross, wenn der Winkel α so klein ist, dass

$$\sin \alpha = \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

gesetzt werden darf und demgemäss die Potenzen von α bei der Ausrechnung von der dritten an weggelassen werden dürfen?

Fig. 13.



28 ([41—44]). Fig. 13 stellt den Durchschnitt eines Prisma von Glas (Brechungsexponent $n = 1.5$) vor, durch eine Ebene erhalten, welche senkrecht gegen die brechende Kante des Prisma's ist.

Wie gross ist der Austrittswinkel δ und die Gesammtablenkung ω bei folgenden Eintrittswinkeln α und brechenden Winkeln ε?

$\alpha = 10^0$	45^0	10^0	20^0
$\varepsilon = 36^0\,38.9'$	60^0	30^0	40^0.

29. Unter Bezugnahme auf Fig. 13, was die Winkelbezeichnungen anbetrifft, werden die Aufgaben gestellt:

Wie gross ist beim brechenden Winkel ε und dem Brechungsindex n die Totalablenkung ω, wenn der eintretende Strahl die Richtung des Einfallslothes hat?

Wenn in diesem Falle ε gegeben ist und die Totalablenkung ω gemessen wird, welche Formel führt zur Kenntniss von n?

30. Unter Bezugnahme auf Fig. 13, betreffend die Winkelbezeichnungen, werden die Fragen gestellt:

a) Wenn der brechende Winkel allgemein ε, der Brechungsindex n ist, welche Gleichung ergiebt den Eintrittswinkel α, welcher ein Minimum der Gesammtablenkung ω zur Folge hat?

b) ([45]) Wenn der brechende Winkel 30^0, der Brechungsindex $n = \frac{3}{2}$ ist, unter welchem Winkel muss ein Strahl ins Prisma eintreten, damit die Gesammtablenkung Minimum wird und wie gross ist letztere?

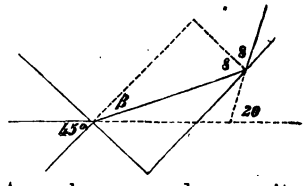
c) Wenn der brechende Winkel ε gegeben und die Minimalablenkung ω gemessen worden ist, welcher Ausdruck dient zur Berechnung von n aus beiden Grössen?

d) Aus den im Folgenden gegebenen Winkeln (ε) und gemessenen Minimalablenkungen sind die Brechungsindices zu berechnen:

	([46]). Flintglas und rothes Licht.	([47]). Crownglas und violettes Licht	([48]). Crownglas und rothes Licht.
$\varepsilon =$	$36^0\,24.9'$	60^0	60^0
$\omega =$	$27^0\,47.9'$	$49^0\,10.5$	$46^0\,15.6$

31 ([49. 50]). Der brechende Winkel eines Prisma's von Glas ($n = \frac{3}{2}$) beträgt 90^0. Welche Totalablenkung erleidet ein unter 45^0 eintretender Strahl, welcher an der zweiten Fläche total reflectirt wird?

Fig. 14.



Wie gross muss der brechende Winkel des Prisma's wenigstens sein, damit jeder eintretende Strahl ohne Ausnahme an der zweiten Fläche total reflectirt wird?

Brechung homogenen Lichtes beim Uebergange aus einem Mittel ins andere durch eine sphärische Fläche.

Die aus dem ersten Hauptbrennpunkte kommenden Centralstrahlen gehen nach der Brechung der Axe parallel.

Einfallende, zur Axe parallele Strahlen werden beim Uebergange ins zweite Mittel durch die sphärische Fläche nach dem zweiten Hauptbrennpunkt hingebrochen.

32. Licht tritt aus Luft in eine sphärische Glasfläche von 20 cm Radius, Brechungsindex $n = \frac{3}{2}$.

Wie gross ist (vom Scheitel an gerechnet), je nachdem die Fläche nach den einfallenden Strahlen zu convex oder concav ist, für Centralstrahlen:

die erste Hauptbrennweite,
die zweite Hauptbrennweite,
die conjugirte Brennweite zu einem auf der Axe 160 cm vor der Fläche gelegenen l. Punkte?

33. Das Licht tritt aus einem Glascylinder von 10 cm Radius, welcher halbkugelförmig geschlossen ist, in Luft ein (Luft in Glas $n = \frac{3}{2}$).

Wie gross ist vom Scheitel der Schlussfläche an gerechnet für Centralstrahlen:

die erste Hauptbrennweite (A),
die zweite Hauptbrennweite (F),
die conjugirte Brennweite zu einem im Glase 6 cm vor dem Scheitel der Fläche liegenden leuchtenden Punkte?

Brechung homogenen Lichtes in Linsen, die zu beiden Seiten an dasselbe Medium grenzen.

Die Cardinalpunkte und Cardinalentfernungen, welche im Allgemeinen für Centralstrahlen und ein beliebiges System sphärischer Flächen zur Orientirung eingeführt sind, kommen schon in den Aufgaben dieses Capitels vor.

Ein aus dem ersten Hauptbrennpunkte ausgehender einfallender Strahl geht nach allen in der Linse erlittenen Brechungen der Axe parallel.

Der Axe parallele, einfallende Strahlen gehen nach allen in der Linse erlittenen Brechungen durch den zweiten Hauptbrennpunkt.

Der zweite Hauptpunkt ist das optische Bild des ersten Hauptpunktes. Die in beiden Hauptpunkten zur Axe senkrecht gelegten Ebenen heissen resp. zweite und erste Hauptebene. Ein in der ersten Hauptebene liegender Punkt hat in der zweiten Hauptebene sein optisches Bild, welches letztere auf derselben Seite der Axe und in derselben Entfernung von der Axe liegt, als der leuchtende Punkt.

Der zweite Knotenpunkt ist das Bild des ersten Knotenpunktes; ein aus dem ersten Knotenpunkt kommender einfallender Strahl geht nach allen an der Linse erlittenen Brechungen, der ursprünglichen Richtung parallel, durch den zweiten Knotenpunkt.

Lage der Cardinalpunkte bei einer biconvexen Linse.

r Radius der ersten, von einfallendem Licht getroffenen, brechenden Fläche;
r_1 Radius der zweiten brechenden Fläche;

d Dicke der Linse;

n Brechungsindex beim Uebertritt aus dem umgebenden Medium in die Linsensubstanz;

h_1 Entfernung des ersten (nach der Seite des einfallenden Lichtes zu gelegenen) Hauptpunktes vom Scheitel der ersten brechenden Fläche; ein positiver Werth von h_1 bedeutet die Lage des ersten Hauptpunktes vor der Linse, ein negativer Werth von h_1 bedeutet, dass der Hauptpunkt hinter der ersten brechenden Fläche im Glase liegt;

h_2 Entfernung des zweiten (nach der Seite des gebrochenen Lichtes zu gelegenen) Hauptpunktes vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche; bei positivem h_2 liegt der Hauptpunkt hinter der zweiten brechenden Fläche, bei negativem h_2 liegt derselbe vor der zweiten brechenden Fläche im Glase;

k_1 Entfernung des ersten Knotenpunktes vom ersten Hauptpunkte; positives k_1 bedeutet Lage des Knotenpunktes nach dem einfallenden Lichte zu;

k_2 Entfernung des zweiten Knotenpunktes vom zweiten Hauptpunkte; positives k_2 deutet auf die Lage des Knotenpunktes nach dem gebrochenen Lichte zu;

A erste Hauptbrennweite, d. i. Entfernung des ersten Hauptbrennpunktes vom ersten Hauptpunkte; positives A bedeutet, dass vom Hauptbrennpunkte wirklich ausgehende einfallende Strahlen nach der Brechung parallel zur Axe gehen, negatives A bedeutet, dass nach dem Hauptbrennpunkte convergirende Strahlen durch die Brechung parallel zur Axe gemacht werden;

F zweite Hauptbrennweite, d. i. Entfernung des zweiten Hauptbrennpunktes vom zweiten Hauptpunkte; positives F entspricht einem Hauptbrennpunkte durch den die gebrochenen Strahlen wirklich gehen, negatives F bedeutet einen Hauptpunkt, aus dem die Strahlen nach der Brechung zu kommen scheinen;

Die Cardinalpunkte der Linse werden durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$h_1 = \frac{-rd}{-(n-1)d + n(r+r_1)}$$

$$h_2 = \frac{-r_1 d}{-(n-1)d + n(r+r_1)}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{F} = (n-1)\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} - \frac{(n-1)d}{nrr_1}\right\}$$

$$k_1 = A - F \qquad k_2 = F - A.$$

Lage der Cardinalpunkte bei andern (als biconvexen) Linsen.

Die im Vorigen gegebenen Ausdrücke gelten allgemein, wenn der Radius einer Fläche, die nach Aussen concav ist mit negativem Vorzeichen in dieselben eingeführt wird.

34. Die Lage der Cardinalpunkte ist bei folgenden Linsen, jede von 1 cm Dicke, zu bestimmen.

	biconvex	planconvex	convex concav	planconcav	biconcav
Erster Radius cm:	10	25	30	30	30
Zweiter Radius cm:	12	∞	60	∞	30

Brechungsindex $n = \frac{3}{2}$.

35. Bei einem Brennglas, nach Art der Tschirnhausen'schen, beträgt der Radius jeder sphärischen Grenzfläche 100 cm; die Dicke der Linse 10 cm; Brechungsindex $n = \frac{3}{2}$.

Eine gerade Linie von 10 cm Höhe wird senkrecht auf die Axe der Linse und zwar vom einen Scheitel der Linse, zuerst 200 cm, dann 1013.58 cm entfernt, aufgestellt:

In wieviel cm Entfernung vom andern Scheitel der Linse erscheint das Bild; welche Lage und Höhe hat es?

36. Eine Convexlinse (Dicke bei der Rechnung zu vernachlässigen), für welche eine der folgenden Brennweiten angenommen wird:

1 2 3 4 5 m,

soll, in den Laden eines Dunkelzimmers eingesetzt, zur Abbildung einer 1000 m vom Laden entfernten senkrecht stehenden Fläche auf einem in geeigneter Entfernung aufgestellten weissen Schirme dienen.

Wie viel qmm Inhalt (2 Decimalen) wird das Bild eines Stückes abgebildeter Fläche von 1 qm Inhalt bei den angegebenen Brennweiten der abbildenden Linse besitzen?

37. Es ist die Vergrösserung einer sehr dünnen Loupe von 5 cm Brennweite für Augen zu berechnen, deren deutliche Sehweite

10 20 25 30 40 cm

angenommen wird, wobei die Zahl 25 für das normale Auge gilt.

38 ([69]). Jede der gleichstarkgekrümmten Flächen einer biconcaven Linse (mit zu vernachlässigender Dicke) hat 30 cm Radius. Ein leuchtender Punkt wird auf der Axe der Linse von letzterer an bis ins Unendliche fortbewegt. $n = \frac{3}{2}$.

Wie lang ist die Strecke, innerhalb welcher sich das Bild des leuchtenden Punktes während dessen Verschiebung forbewegt?

39. Convexlinsen (mit zu vernachlässigender Dicke) werden behufs Bestimmung ihrer Brennweite durch Lichtflammenbilder untersucht.

Wie gross sind die Brennweiten der Linsen, wenn die in den Entfernungen:

100 cm 100 cm 100 cm a

von der Linse aufgestellte Flamme ein verkehrtes Bild erzeugt, welches in den gemessenen Entfernungen von resp.:

25 cm 100 cm 300 cm α

von der Linse erscheint?

40. Bei der Bestimmung von Brennweiten von Convexlinsen (mit zu vernachlässigender Dicke) durch beleuchtete Massstäbe wird gefunden:

Entfernung des Masses von der Linse:	100 cm	100 cm	100 cm	a
Grösse des beleuchteten Masses:	10 cm	10 cm	10 cm	b
Grösse des Bildes vom Masse:	90 cm	30 cm	2.5 cm	β.

Wie viel cm Brennweite entsprechen diesen Angaben?

41. Wie viel cm beträgt die resultirende Brennweite folgender Combinationen von Linsen (ohne merkliche Dicke), welche, dicht an einander gestellt, zu Versuchen dienen:

	1.	2.	3.
Convexlinse, Brennweite:	10 cm	20 cm	10 cm
Convexlinse, Brennweite:	10 cm	10 cm	5 cm
	4.	**5.**	**6.**
Convexlinse, Brennweite:	20 cm	10 cm	20 cm
Concavlinse, Brennweite:	20 cm	5 cm	10 cm?

42. Eine sehr dünne Convexlinse von 15 cm Brennweite ergiebt nach der Aneinderstellung ohne Zwischenraum an drei verschiedene Concavlinsen folgende Brennweiten der Combinationen:

60 cm 37.5 cm 30 cm.

Wie viel cm Brennweite haben hiernach die verwendeten Concavlinsen?

43. Behufs Messung der Brennweite einer Concavlinse, welche den Durchmesser d hat, stellt man dieselbe so gegen einfallendes

Sonnenlicht, dass die Axe der Linse in ihrer Verlängerung den Mittelpunkt der Sonne trifft. Scheinbarer Durchmesser der Sonne 2σ, wobei σ durch den Werth $2tg\sigma = 0.0094$ bestimmt ist. Das auf die Linse fallende Sonnenlicht divergirt nach der Brechung und es stellt sich heraus, dass ein parallel zu den Hauptebenen der Linse hinter derselben aufgestellter Schirm einen Zerstreuungskreis von dem Durchmesser nd (n eine positive ganze Zahl) zeigt, sobald die Entfernung des Schirmes von der Linse A ist.

Wie gross ist nach diesen Angaben (abgesehen vom negativen Vorzeichen) der reciproke Werth der Linsenbrennweite F, d. i. also $\frac{1}{F}$?

Gang homogener Lichtstrahlen in einer aus mehreren brechenden Medien zusammengesetzten Substanz.

44. Das mittlere, für die weitesten Entfernungen accomodirte Auge ist durch folgende Abmessungen gegeben:

erster Hauptpunkt	1.931 mm	hinter der Vorderfläche der Hornhaut;
zweiter Hauptpunkt	2.328 mm	hinter der Vorderfläche der Hornhaut;
erste Hauptbrennweite	$A = 14.767$ mm;	
zweite Hauptbrennweite	$F = 19.883$ mm;	
erster Knotenpunkt	7.047 mm	hinter der Vorderfläche der Hornhaut;
zweiter Knotenpunkt	7.444 mm	hinter der Vorderfläche der Hornhaut;
Netzhaut	19.839 mm	hinter dem zweiten Hauptpunkt.

Eine Gerade, welche durch das Auge abgebildet wird, ist senkrecht auf der Axe des Auges vor dem letzteren aufgestellt und durch Folgendes gegeben:

	1.	2.	3.	4.	5.
Entfernuug der Geraden vom 1. Hauptpunkt:	∞	1000 m	10 m	1 m	25 cm
Grösse der Geraden:	1 m	1 m	1 m	10 mm	10 mm.

In wie viel mm Entfernung vor oder hinter der Netzhaut erscheint das optische Bild der Geraden und wie viel mm Höhe besitzt es (eine Decimale)?

45. Eine Schwefelkohlenstofflinse besteht aus zwei mit ihren hohlen Seiten gegen einander gekehrten, einander völlig gleichen Glasschalen, deren Zwischenraum mit der brechenden Flüssigkeit ausgefüllt ist:

1995 mm Radius der hohlen, inneren Fläche jeder Glasschale;
2000 mm „ „ erhabenen, äusseren „ „ „ ;
150 mm grösste Dicke der Schwefelkohlenstoffschicht (auf der Axe gemessen);
$\frac{3}{2}$ Brechungsindex von leerem Raum in Glas;
$\frac{13}{8}$ „ „ „ „ „ Schwefelkohlenstoff.

Es ist im Sinne der vor Aufgabe 35 gegebenen Definitionen und Bezeichnungen zu berechnen:

1. die Entfernung h_1 des 1. Hauptpunktes von dem Scheitel der brechenden Fläche, in welche das Licht bei der ersten Brechung aus dem leeren Raume in die Linse tritt;
2. die Entfernung h_2 des 2. Hauptpunktes von dem Scheitel der brechenden Fläche, aus welcher das gebrochene Licht zuletzt austritt;
3. die Entfernung A des 1. Hauptbrennpunktes vom 1. Hauptpunkt;
4. die Entfernung F des 2. Hauptbrennpunktes vom 2. Hauptpunkt;
5. die Entfernung k_1 des 1. Knotenpunktes vom 1. Hauptpunkte;
6. Die Entfernung k_2 des 2. Knotenpunktes vom 2. Hauptpunkte.

Die Berechnung bezieht sich der Aufgabe gemäss successive auf folgende vier optische Systeme:

a. erstes System. Unbegrenzte Glasmasse, welche mit einer convexen Fläche von 2000 mm Radius dem aus dem leeren Raume kommenden einfallenden Lichte entgegensteht;

b. zweites System Eine der Kugelschalen, welche mit der erhabenen Seite an den leeren Raum, mit der hohlen Seite an eine unbegrenzte Schwefelkohlenstoffschicht angrenzt;

c. drittes System. Dasselbe besteht aus einer der Kugelschalen, welche mit der erhabenen Seite an den leeren Raum, mit der hohlen Seite an eine im Maximum 150 mm dicke Schwefelkohlenstoffschicht angrenzt. Letztere Schicht ist durch eine unendlich-

lange Glasmasse begrenzt, welche mit einer hohlen Kugelfläche von 1995 mm Radius an die Flüssigkeit anstösst;

d. viertes System. Dieses ist endlich die Schwefelkohlenstofflinse, wie sie zuerst beschrieben wurde selbst; sie grenzt nach allen Seiten an den leeren Raum.

Bei der successiven Berechnung kann man fortgesetzt folgende Fundamentalformeln anwenden, die sich auf die Abbildung einer Geraden durch Strahlen beziehen, die von letzterer ausgehend aus dem optischen Mittel, in welchem die Gerade sich befindet, durch eine sphärische Grenzfläche nach einem zweiten, vom ersten verschiedenen, optischen Mittel gelangen:

1. $f = -\frac{nar}{(n-1)a-r}$ 2. $-y = \frac{r}{(n-1)a-r}.Y.$

In den Formeln bedeutet:

a (mit positivem Vorzeichen) die Entfernung einer senkrecht auf der Axe im ersten Mittel aufgestellten Geraden vom Scheitel der sphärischen Fläche, in welcher beide Mittel an einander grenzen; a ist negativ einzusetzen, wenn die leuchtende Gerade nicht existirt, sondern durch ein im zweiten Mittel befindliches geometrisches Bild vertreten wird, zu dem die im ersten Mittel sich bewegenden Strahlen sich, nach dem zweiten Mittel convergirend, zu vereinigen streben;

Y die Grösse der abzubildenden, auf der Axe senkrecht aufgestellten, Geraden; positives Vorzeichen bedeutet Stellung auf der Axe, negatives Stellung unter der Axe;

r den Radius der Grenzfläche zwischen beiden Mitteln, wobei die Länge des Radius in die Formel mit positivem oder negativem Vorzeichen einzusetzen ist, je nachdem die sphärische Fläche den einfallenden Strahlen die convexe oder concave Seite entgegenhält;

n den Brechungsindex beim Uebertritt des Lichtes aus dem ersten in das zweite Mittel;

f Entfernung des Bildes der Geraden vom Scheitel der Grenzfläche beider Mittel; ein aus der Rechnung mit positivem Vorzeichen hervorgehendes f bezieht sich auf ein im zweiten Mittel vorhandenes physisches Bild der Geraden; ein negatives Vorzeichen auf ein im ersten Mittel durch die Brechung erzeugtes geometrisches Bild;

y die Höhe des Bildes der Geraden mit Vorzeichenbedeutung, wie bei Y.

Die Rechnung wird bequemer, wenn Endausdrücke für die f und y von der Form $\frac{ma+p}{qa+s}$ durch Division in Zähler und Nenner immer auf die Form $\frac{\frac{m}{q}a+\frac{p}{q}}{a+\frac{s}{q}}$ gebracht werden.

Sphärische Abweichung bei der Brechung homogener Lichtstrahlen.

Die in Aufgabe 10 für sphärische Spiegel an die Spitze gestellten Definitionen gelten auch für Brechung an sphärischen Flächen; Längenabweichung ist der auf der Axe gemessene Abstand des Brennpunktes der Centralstrahlen und Randstrahlen; Seitenabweichung ist der zur Axe senkrechte Abstand, in welchem die äussersten Randstrahlen, eventuell ihre Verlängerungen am Brennpunkte der Centralstrahlen vorübergehen.

Die Begriffe gelten nicht nur für Parallelstrahlen, sondern für eine beliebige Lage des leuchtenden, auf der Axe gelegenen Punktes gegen die sphärische Fläche.

46 ([54. 55]). Parallelstrahlen zur Axe fallen auf

eine planconvexe Linse, Radius r, halbe Breite der Linse b;

eine planconcave Linse, Radius r, halbe Breite der Linse b,

wobei den einfallenden Lichtstrahlen die ebene Seite der Linse zugekehrt ist.

Wie gross ist Längen- und Seitenabweichung bei der planconvexen Linse und wie gross die Längenabweichung bei der planconcaven Linse; bei beiden Linsen unter der Annahme berechnet, dass b gegen r so klein ist, dass man nur die erste, zweite und dritte Potenz von b beizubehalten braucht, die höheren Potenzen von b jedoch ohne Nachtheil für die Rechnung vernachlässigen darf.

47. Auf eine Vollkugel aus Glas ([52]); einen kugelförmigen Tropfen von Wasser ([53]) oder von Schwefelkohlenstoff, Radius jeder Kugel $= r$ angenommen, fallen Parallelstrahlen auf.

Wie gross ist die Längenabweichung der gebrochenen Strahlen, wenn der Brechungsindex von Glas $\frac{3}{2}$, von Wasser $\frac{4}{3}$, von Schwefelkohlenstoff $1\frac{3}{8}$ angenommen wird?

Bei Auflösung der nachfolgenden Aufgaben über Abweichung ist folgende Formel A für die Längenabweichung bei einer biconvexen Linse von sehr geringer Dicke zu verwenden (s. a. Gehler, phys. Wörterbuch, Band VI, Artikel Linse, S. 396 ff.):

$$A. \quad \Delta f = -\frac{f^2 x^2}{2F}\left\{\frac{3n+2}{na^2} - \frac{3n^2-3n-4}{nar} - \frac{3n+1}{a\varrho} + \frac{n^3-2n^2+2}{nr^2} + \frac{2n^2-2n-1}{r\varrho} + \frac{n^2}{\varrho^2}\right\}.$$

In dieser Formel bedeutet:

r den Radius der den einfallenden Strahlen zugekehrten Fläche;
ϱ den Radius der von den einfallenden Strahlen abgewendeten Fläche;
n den Brechungsindex des Lichtes beim Eintritt in die Linsensubstanz;
F die Hauptbrennweite der Convexlinse;
x die halbe Breite der Linse;
a die Entfernung eines auf der Axe befindlichen leuchtenden Punktes von der Linse;
f die dem a entsprechende Brennweite, d. i. auch die Entfernung des optischen Bildes des leuchtenden Punktes von der Linse für Centralstrahlen;
Δf den Zuwachs, welchen f erleidet, wenn das optische Bild des leuchtenden Punktes, statt durch Centralstrahlen, durch Randstrahlen hervorgebracht wird, welche von einer Zone der Linse vom Radius x herkommen.

Die Zeichenregeln sind die allgemein bekannten: der Radius einer concaven Fläche ist mit negativem Vorzeichen in die Formel einzusetzen; liegt F oder f auf der Seite der einfallenden Strahlen, so werden sie ebenfalls mit negativem Vorzeichen eingeführt; divergiren die auf die Linse fallenden Strahlen von einem leuchtenden Punkte, so ist a positiv; convergiren sie nach einem Punkte hinter der Linse, so ist a negativ einzusetzen.

48. Schliesst an an Aufgabe 46. Fallen Parallelstrahlen zur Axe auf

eine sehr dünne, planconvexe Linse, Radius r, halbe Breite b;

eine sehr dünne, planconcave Linse, Radius r, halbe Breite b;

wie gross ist die Längenabweichung, wenn der Brechungsindex von Luft in Glas allgemein n, speciell $\frac{3}{2}$ angenommen wird, und die einfallenden Strahlen zuerst

a. die plane Seite;

b. die gewölbte Seite der Linse treffen?

49. Bei einer concavconvexen Linse beträgt

der Radius der convexen Fläche r Millimeter,

„ „ „ concaven „ ϱ „ .

Die Längenabweichung für parallel zur Axe einfallende Strahlen hat zwei von einander verschiedene Werthe, je nachdem die

einfallenden Strahlen zuerst die convexe oder die concave Seite der Linse treffen.

Wie gross ist der absolute Werth der Differenz zwischen beiden Abweichungen, wenn der Brechungsindex von Luft in Glas $= \frac{3}{2}$ angenommen wird?

50. Bei einer biconvexen Linse von bester Form ist für $n = \frac{3}{2}$ der Radius der einen Fläche r, der der andern $6r$.

Wie gross ist für Parallelstrahlen zur Axe die Längenabweichung, je nachdem dem einfallenden Lichte die stärker oder schwächer gekrümmte Fläche entgegensteht?

51. Wie viel dem beträgt die Längenabweichung für einfallende, zur Axe parallele Strahlen bei einer Convexlinse von Glas ($n = \frac{3}{2}$ und halbe Linsenbreite $= 10$ cm), deren beide gleichstark-gekrümmte Flächen einen Krümmungsradius, jede von 100 cm haben; ferner, wenn man die Linse durch einen Schnitt senkrecht gegen die Axe in zwei congruente, planconvexe Linsen zerlegt, beide dicht an einander stellt, so dass bei beiden die gewölbten Seiten nach den einfallenden Strahlen zugekehrt sind: wie gross ist in diesem Falle die Längenabweichung für parallel zur Axe einfallende Strahlen?

Farbenzerstreuung in Prismen.

52. In jedem der folgenden Beispiele sind in gleicher Horizontalreihe die nöthigen Angaben gemacht, aus welchen zu berechnen ist:

der Winkel, den der aus einem Prisma austretende rothe Lichtstrahl mit dem Einfallsloth bildet;

der Winkel, den in gleichem Sinne der austretende violette Strahl bildet;

der Winkel, den der austretende rothe mit dem austretenden violetten Strahl einschliesst.

Es ist dabei vorausgesetzt, dass das weisse Licht, welches in das Prisma eintritt, in einer gegen die brechende Kante des Prisma's senkrechten Ebene enthalten ist

No. des Beispiels:	Das Prisma besteht aus:	Brechender Winkel des Prisma's:	Winkel des einfallenden weissen Strahls mit dem Einfallslothe der Eintrittsfläche:	Brechungsindex des rothen Lichtes:	Brechungsindex des violetten Lichtes:
1 (74)	Crownglas	30°	30°	1.5258	1.5466
2 (75)	Flintglas	36° 24.8′	32° 14.3	1.7011	1.7382
3 (76)	Crownglas	20°	0°	1.5	1.52
4 (77)	Crownglas	30°	0°	1.5	1.52
5 (78)	Crownglas	40°	0°	1.5	1.52
6 (79)	Crownglas	30°	30°	1.5	1.52
7 (79)	Flintglas	30°	30°	1.6	1.64
8 (80)	Flintglas	30°	0°	1.6	1.64.

53 (81b. 83). Ein weisser Lichtstrahl tritt in ein Prisma unter einem solchen Winkel ein, dass der in ihm enthaltene rothe Lichtstrahl das Minimum der Totalablenkung erleidet. Der gesammte Brechungsvorgang erfolgt in einer gegen die brechende Kante des Prisma's rechtwinkligen Ebene. Die Brechungsindices des rothen und violetten Lichtes werden resp. zu 1.5 und 1.52 angenommen.

Wie gross sind die Winkel, welche die aus dem Prisma austretenden rothen und violetten Lichtstrahlen mit einander einschliessen, je nachdem der brechende Winkel des Prisma's:

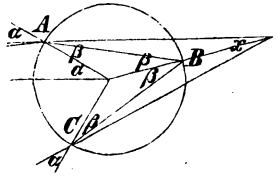
20° 30° 40°

beträgt?

Farbenzerstreuung bei der Brechung an sphärischen Flächen.

54 (84). Ein weisser Lichtstrahl bildet beim Eintritt in einen kugelförmigen Wassertropfen mit dem nach dem Einfallspunkte gezogenen Radius einen Winkel von 30°. In Fig. 15., welche einen Durchschnitt des Tropfens mit einer durch dessen Mittelpunkt und den einfallenden Strahl gelegten Ebene darstellt, ist der weitere Fortgang des Lichtes gezeichnet, welcher in Folgendem besteht. Das bei A gebrochene Licht erleidet in B theils Brechung nach Aussen, theils Reflexion nach Innen; das reflectirte Licht tritt bei C aus.

Fig. 15.

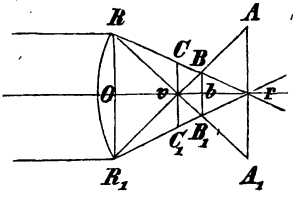


Die Brechungsindices des im eintretenden weissen Licht enthaltenen rothen und violetten Strahles betragen resp. 1.331 und 1.344.

Wie gross ist der Winkel x, den die aus dem Tropfen austretenden rothen und die aus demselben gehenden violetten Strahlen mit den bei A eintretenden weissen Strahl bilden?

55. Figur 16 stellt den axialen Durchschnitt einer Convexlinse von sehr geringer Dicke vor, auf welche weisse, zur Axe parallele Strahlen treffen. In der Figur ist:

Fig. 16.



OR die Axe;
r der Brennpunkt der rothen Strahlen;
v der Brennpunkt der violetten Strahlen;
vr die chromatische Längenabweichung;
AA_1 (senkrecht zur Axe) der Durchmesser des Abweichungskreises der violetten Strahlen;
CC_1 (senkrecht zur Axe) der Durchmesser des Abweichungskreises der rothen Strahlen;
BB_1 (senkrecht zur Axe) der Durchmesser des kleinsten Abweichungskreises;
RR_1 die ganze Breite der Linse.

Wie viel Centimeter betragen bei einer sehr dünnen Linse von Crownglas (rothe Strahlen $n = 1.5$, violette Strahlen $n = 1.52$) oder Flintglas (rothe Strahlen $n = 1.6$, violette Strahlen $n = 1.64$), deren sphärische Flächen resp. 10 und 60 cm Radius haben, und welche die Breite $RR_1 = 10$ cm besitzt:

die chromatische Längenabweichung;
der Durchmesser der rothen, kleinsten und violetten Abweichungskreise,

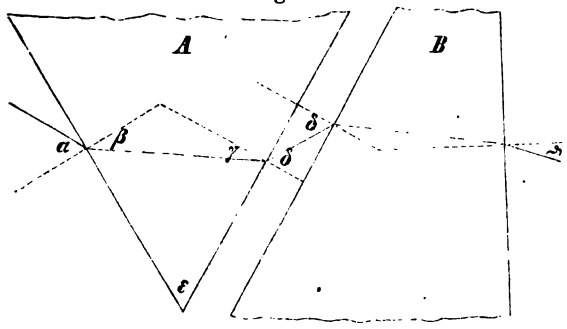
wenn von der sphärischen Abweichung der Strahlen ganz abgesehen wird?

56. Bei einer biconvexen Flintglaslinse, deren ganze Breite 20 cm beträgt und bei welcher jede Fläche 100 cm Radius hat, treten weisse, zur Axe parallele Strahlen ein. Wie viel cm lang ist das Stück Axe, durch welches die gebrochenen Strahlen in Folge der chromatischen und sphärischen Abweichung hindurchgehen? Die Brechungsindices der rothen und violetten Strahlen sind resp. 1.6 und 1.64 anzunehmen.

Achromasie von Prismen.

57. Ein Crownglasprisma A (Fig. 17) ist durch ein Flintglasprisma B zu achromatisiren. Der brechende Winkel ε' des Flintglasprisma's ist aus folgenden gegebenen Grössen trigonometrisch zu berechnen und dabei zu berücksichtigen, dass die einander zugewandten Flächen beider Prismen parallel sind.

Fig. 17.



ε der brechende Winkel des Crownglasprisma's;

n der Brechungsindex von rothem Licht und Crownglas;

$n + \Delta n$ der Brechungsindex von violettem Licht und Crownglas;

α der Winkel, unter welchem weisses Licht ins Crownglasprisma eintritt;

n' der Brechungsindex von rothem Licht und Flintglas;

$n' + \Delta n'$ der Brechungsindex von violettem Licht und Flintglas.

58 ([91. 92. 93]). Wenn ein Lichtstrahl die Eintrittsfläche eines Crownglasprismas von einem brechenden Winkel von:

$\varepsilon =$ 20^0 30^0 40^0

senkrecht trifft: wie gross muss der brechende Winkel eines dicht an das Crownglasprisma angelegten achromatisirenden Flintglasprisma's sein, wenn die Brechungsindices von rothem und violetten Licht und Crown- und Flintglas resp. 1.5, 1.52, 1.6, und 1.64 sind?

59 ([94. 95. 96]). Weisses Licht tritt in ein Crownglasprisma von 20^0, 30^0, 40^0 brechendem Winkel unter einem solchen Winkel ein, dass der im weissen Licht enthaltene rothe Strahl das Minimum der Ablenkung erleidet. Rothes und violettes Licht und Crownglas und Flintglas haben resp. die Brechungsindices 1.5, 1,52, 1.6, 1.64. Wie gross müssen die brechenden Winkel von dicht an die Crownglasprismen angelegten achromatisirenden Flintglasprismen sein?

Achromasie von Linsen.

60. Es sollen Crownglaslinsen von sehr geringer Dicke durch dicht an erstere angefügte Flintglaslinsen von sehr geringer Dicke achromatisirt werden. Brechungsindices für rothe und violette Strahlen im Crownglas resp. 1.5 und 1.52, im Flintglas resp. 1.6 und 1.64;

r_1 Radius der ersten Crownglasfläche;
r_2 „ „ zweiten „ ;
r_3 „ „ ersten Flintglasfläche;
r_4 „ „ zweiten „ ;
F Brennweite der combinirten Linsen.

Es wird die Aufgabe gestellt, aus den in nachfolgenden Beispielen gegebenen Grössen die Radien der Flächen so zu berechnen, dass die Combination beider Linsen achromatisch ist:

a) $F = 100$ cm; die Crownglaslinse soll biconvex und $r_1 = 2r_2$ sein; die zweite Crownglasfläche soll gleiche Krümmung mit der ersten Flintglasfläche haben;

b) $F = 1000$ cm; die übrigen Bedingungen wie unter a;

c) $F = 100$ cm. Die Crownglaslinse soll biconvex sein, ihre zweite Fläche gleiche Krümmung mit der ersten Flintglasfläche haben, die zweite Flintglasfläche ist plan;

d) $F = -100$ cm; d. h. die Crownglaslinse soll biconcav sein und 100 cm Hauptbrennweite haben; die anliegenden Flächen beider Linsen sollen gleichgekrümmt und die zweite Flintglasfläche plan sein;

e) $F = -100$ cm; d. i. Crownglaslinse biconcav; die anliegenden Flächen beider Linsen sollen gleich gekrümmt sein, sowie auch die erste Crownglas- und zweite (nach Aussen convexe) Flintglasfläche.

Wellenbewegung des Lichtes.

61. Wie viel (ganze) Billionen Schwingungen macht ein Aethertheilchen in einem durch den leeren Raum gehenden Strahle folgender Farbe pro Sekunde? Die Lichtgeschwindigkeit pro Sekunde für den leeren Raum ist in runder Zahl 300 Millionen Meter. Der Farbe entsprechen die Wellenlängen (für leeren Raum) in der Einheit 0.0001 m ausgedrückt:

roth (B)	gelb (D)	blaugrün (F)	blau (G)	violett (H)
6.87	5.89	4.85	4.30	3.93.

62. Wie gross ist nach den Angaben der vorigen Aufgabe die Schwingungsdauer eines Aethertheilchens im leeren Raume (Einheit $\frac{1}{10^{15}}$ Sekunde) bei den genannten fünf Arten farbigen Lichtes?

63. Es sind die Wellenlängen folgender farbiger Strahlen im leeren Raume und ihre Brechungsindices in Frauenhofer's Crownglas No. 13 gegeben:

	roth (B)	gelb (D)	blaugrün (F)	blau (G)	violett (H)
Wellenlänge in $\frac{1}{10000}$ m:	6.87	5.89	4.85	4.30	3.93
Brechungsindex:	1.524	1.528	1.534	1.540	1.545.

Wie gross sind die Wellenlängen der farbigen Strahlen in der genannten Sorte Crownglas?

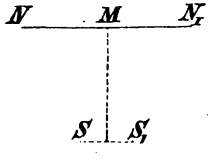
64. Die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume ist in runder Zahl 300 Millionen Meter.

Wie viel (ganze) Millionen Meter Geschwindigkeit besitzt das Licht folgender Strahlen beim Durchgang durch die anbei bemerkten Glassorten?

Crownglas	und	rothes	Licht,	Brechungsindex 1.5
„	„	violettes	„	„ 1.52
Flintglas	„	rothes	„	„ 1.6
„	„	violettes	„	„ 1.64.

65. Figur 18 ist ein Durchschnitt durch eine Ebene, welche durch zwei isochronisch schwingende leuchtende Punkte S und S_1 und rechtwinklig gegen einen Schirm gelegt worden ist, mit welchem sie die Durchschnittslinie NN_1 bildet; $SS_1 = 1$ mm, der rechtwinklige Abstand beider Schirme beträgt 100 mm. Wenn in S und S_1 Licht von den in Aufgabe 63 angeführten Wellenlängen schwingt, so wird bezüglich der auf dem Schirme NN_1 erscheinenden Interferenzstreifen gefragt:

Fig. 18.



wie gross ist die Entfernung des der hellen Mitte des Schirmes zunächst liegenden ersten hellen und ersten dunkeln Streifens von der Mitte?

66. Die Brechungsindices in runder Zahl sind bei

Wasser:	Glas:	Schwefelkohlenstoff:
$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$1\frac{3}{8}$

Wie gross ist der Einfallswinkel von Licht auf die Oberfläche der betreffenden Substanzen, für welchen das gespiegelte Licht das Maximum der Polarisation erlangt?

67. Die Polarisationsebenen eines senkrecht auf eine natürliche Fläche eines untersuchenden Kalkspathes fallenden geradlinig polarisirten Lichtstrahles von der Intensität 100 bilden mit dem Hauptschnitt des Kalkspathes die Winkel:

$$0^0 \quad 15^0 \quad 30^0 \quad 45^0 \quad 60^0 \quad 75^0 \quad 90^0.$$

Wie gross ist (ohne Decimalen) die Intensität des aus dem Kalkspathe austretenden ordentlichen und ausserordentlichen Strahles?

68. Angenommen, zwei horizontal gerichtete, gegen einander rechtwinklig polarisirte Strahlen gleicher Amplitude verfolgen, aus einem dünnen Krystallblättchen herkommend, einen und denselben Weg nach dem Beobachter zu. Der eine Strahl veranlasst die auf seinem Wege liegenden Aethertheilchen zu horizontalen Ausschlägen (positiv gerechnet vom Strahl aus nach rechts), der andere Strahl giebt den Aethertheilchen vertikale Ausschläge (positiv gerechnet vom Strahl aus nach oben).

Welches ist die resultirende Bewegung eines von beiden Strahlen zugleich afficirten Aethertheilchens,

wenn der Strahl mit Horizontalbewegung dem andern um eine Viertelwellenlänge voreilt;

wenn der Strahl mit Horizontalbewegung gegen den andern um eine Viertelwellenlänge zurückbleibt?

69. Ein geradlinig polarisirter Lichtstrahl ertheile einem Aethertheilchen die Bewegung $y = a \sin \frac{2\pi t}{T}$, wobei a die Amplitude, T die Schwingungsdauer ist.

Dieser Strahl soll durch zwei Strahlen ersetzt werden, welche mit jenem gleiche Polarisationsebene, Schwingungsdauer und Amplitude haben und mit ihm gleichen Weg verfolgen mit der Bedingung, dass das afficirte Aethertheilchen in Folge des einen componirenden Strahles seinen Ausschlag nach der positiven Richtung um einen ebensogrossen Bruchtheil der Schwingungsdauer eher beginnt, als es in Folge des andern componirenden Strahles seinen Ausschlag später als der resultirende Strahl anfängt.

70. Die Bahnellipse eines elliptisch polarisirten Lichtstrahles sei auf rechtwinklige Coordinaten bezogen $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Es sind die Gleichungen zweier geradlinig polarisirter Lichtstrahlen aufzustellen, welche hinter der Ellipsenfläche herkommend und rechtwinklig in deren Mittelpunkt die Fläche durchdringend unmittelbar Aetherausschläge in Richtung der Coordinatenaxen veranlassen und die elliptische Bahnbewegung hervorbringen,

wenn dieselbe links gedreht;

wenn dieselbe rechts gedreht

angenommen wird. Bei beiden Strahlen sollen einander gleich sein

die Schwingungsdauer T,

die Wellenlänge λ.

IV. Abtheilung:

Lehre von der Wärme.

Thermometrie.

1. Folgende Temperaturangaben in Celsius'schen Graden sind in Réaumur'sche Grade zu übertragen:

1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)	5 (5)	
16.10	34.72	75.20	80.00	91.70	
6 (6)	7 (7)	8 (8)	9 (9)	10 (10)	
−40.00	$-32\frac{1}{3}$	−25.00	−12.00	−4.50	Gr. C.

2. Folgende Temperaturen (Grad Réaumur) sind in Celsius'sche Grade zu verwandeln:

1 (11)	2 (12)	3 (13)	4 (14)	5 (15)	
13.60	42.00	48.80	60.00	64 96	
6 (16)	7 (17)	8 (18)	9 (19)	10 (20)	
−9.60	−12.00	−13.20	−25.80	−3.00	Gr. R.

3. In Fahrenheit'sche Grade sind zu verwandeln:

1) (21)	Temperatur der grössten Dichte des Wassers	4	Grad Cels.
2) (22)	Siedepunkt des Schwefeläthers	36	„ „
3) (23)	„ „ Alkohols	78	„ „
4) (24)	„ „ Phosphors	290	„ „
5) (25)	„ „ Quecksilbers	350	„ „
6) (26)	„ „ flüssigen Ammoniaks . .	−40	„ „
7) (27)	„ der flüssigen schwefligen Säure	−10	„ „ .

4. In Celsius'sche und Réaumur'sche Grade sind zu verwandeln:

1) ([28]) Schmelzpunkt des Zinnes . . . . 455 Gr. Fahrenheit.
2) ([29]) „ „ Wismuthes . . . 518 „ „
3) ([30]) „ „ gebl. Wachses . . 154.4 „ „
4) ([31]) „ „ festen Quecksilbers — 38.2 „ „
5) ([32]) „ „ festen Broms . . — 13.0 „ „
6) ([33]) „ „ Natriums . . . + 204.08 „ „
7) ([34]) „ „ Antimons . . . + 797.0 „ „

5 ([38]). Welche Temperaturgrade nach Réaumur und Celsius entsprechen dem Nullpunkte der Fahrenheit'schen Scala?

6 ([39b. 42]). Wie gross ist x in den Gleichungen:

x Grad Cels. = x Gr. Fahrenh., x Réaumur = x Gr. Fahrenh.
$-x$ Grad Cels. = $+x$ Gr. Fahrenh., $-x$ Réaumur = $+x$ Gr. Fahrenh.

7. Bei der Untersuchung eines vollkommen calibrirenden Celsius'schen Thermometers findet man:

der Eispunkt fällt dahin, wo an der Scala + 0.8 steht;
der Siedepunkt fällt dahin, wo an der Scala + 100.4 steht.

Es ist eine Correctionstabelle für die an der Scala direct abgelesenen Grade von zwanzig zu zwanzig Grad zu entwerfen.

8. Ein Thermometer wird mittelst mehrerer Quecksilberfäden calibrirt und hierbei vorausgesetzt, dass die Strecke der Röhre zwischen dem Theilstrich 0 und 10 vollkommen cylindrisch sei. Die unmittelbaren Versuchsresultate sind:

ein Quecksilberfaden von ca. 90 Theilstrichen Länge
erstreckt sich vom Theilstrich 0 bis zum Theilstrich 89.8
„ „ „ „ 5 „ „ „ 94.8
„ „ „ „ 10 „ „ „ 99.7;

ein Quecksilberfäden von ca. 80 Theilstrichen Länge
erstreckt sich vom Theilstrich 0 bis zum Theilstrich 80.0
„ „ „ „ 5 „ „ „ 85.0
„ „ „ „ 10 „ „ „ 90.0
„ „ „ „ 15.2 „ „ „ 95.0
„ „ „ „ 20.2 „ „ „ 100.0;

ein Quecksilberfaden von ca. 70 Theilstrichen Länge
erstreckt sich vom Theilstrich 0.0 bis zum Theilstrich 70.2
„ „ „ „ 5.0 „ „ „ 75.1
„ „ „ „ 10.0 „ „ „ 80.1
„ „ „ „ 20.1 „ „ „ 90.0
„ „ „ „ 25.2 „ „ „ 95.0
„ „ „ „ 30.1 „ „ „ 100.0;

ein Quecksilberfaden von ca. 60 Theilstrichen Länge

erstreckt	sich	vom	Theilstrich	0.0	bis	zum	Theilstrich	59.9
„	„	„	„	5.0	„	„	„	65.0
„	„	„	„	10 0	„	„	„	70.1
„	„	„	„	29.9	„	„	„	90.0
„	„	„	„	35.0	„	„	„	95.0
„	„	„	„	40.1	„	„	„	100.0;

ein Quecksilberfaden von ca. 50 Theilstrichen Länge

erstreckt	sich	vom	Theilstrich	0	bis	zum	Theilstrich	49.8
„	„	„	„	5	„	„	„	54.9
„	„	„	„	10	„	„	„	60.0
„	„	„	„	40.0	„	„	„	90.0
„	„	„	„	45.1	„	„	„	95.0
„	„	„	„	50.1	„	„	„	100.0.

Bei Untersuchung des Eis- und Siedepunktes ergab sich ausserdem die Lage

des Eispunktes am Theilstrich 0.8
des Siedepunktes am Theilstrich 100.4.

Es ist nach allen gemachten Angaben eine Tabelle der Correctionen zu entwerfen, welche an den direct abgelesenen Temperaturen 0, 5, 10 etc. bis 100 anzubringen sind.

Ausdehnung fester und tropfbar flüssiger Körper durch die Wärme.

9 a. Stäbe von Platin, resp. Blei, welche bei 0 Grad die Länge 1 besitzen, haben nach Matthiessen bei der Temperatur t eine Länge von:

$$\text{Platin } 1 + \frac{851}{10^8}\, t + \frac{35}{10^{10}}\, t^2,$$

$$\text{Blei } \quad 1 + \frac{2726}{10^8}\, t + \frac{74}{10^{10}}\, t^2.$$

Welchen Werth hat hiernach der mittlere Ausdehnungscoëfficient zwischen 0 und 100 bei beiden Metallen?

b. Wie gross ist die Ausdehnung eines Bleistabes, welcher bei 0 Grad die Länge 1 besitzt, wenn man denselben auf eine der Temperaturen:

20 40 60 80 Grad C.

bringt, die Ausdehnung einmal nach der Formel, ein anderes Mal

mit Hülfe des mittleren Ausdehnungscoëfficienten zwischen 0 und 100 Grad berechnet und in jedem Falle in der Einheit $\frac{1}{10^8}$ ausdrückt?

10. Es bezeichne:

l_o die Länge eines Kupferstabes von 0 Grad;
l_t „ „ „ „ „ t Grad;
f_o die Oberfläche eines kupfernen Gegenstandes bei 0 Grad;
f_t „ „ „ „ „ t Grad;
i_o den körperlichen Inhalt eines kupfernen Gegenstandes bei 0 Grad;
i_t „ „ „ „ „ „ „ t Grad.

Nach Fizeau's Versuchen ist:

$$l_t = l_o \left[1 + \frac{1596}{10^8} \cdot t + \frac{102.5}{10^{10}} \, t^2\right].$$

Ausgehend von voriger Gleichung ist in ähnlicher Weise f_t und i_t auszudrücken und dabei in den Ausdrücken nur die erste und zweite Potenz von t beizubehalten.

11. Ein Meter ist bei 15° C. auf Stäbe folgender Metalle aufgetragen:

	Messing.	Glas.	Eisen.	Platin.
Mittlerer Ausdehnungscoëfficient:	0.000019	0.0000085	0.000012	0.000009.

Wie viel mm Länge besitzt das aufgetragene Mass bei 30° C.?

12. Die mittleren linearen Ausdehnungscoëfficienten von Eisen und Glas betragen resp.:

Eisen 0.000012, Glas 0.0000085.

a. Um wie viel qmm vergrössert sich die Oberfläche, um wie viel cbmm das Volumen einer eisernen Vollkugel, welche bei 0 Grad 1 dcm Durchmesser hat, bei der Erhitzung um 100 Grad C.?

b ([50]). Ein bei 15 Grad C. getheilter Messcylinder fasst bis zum obersten Theilstrich 100 cbcm. Welchen Rauminhalt grenzt diese Marke bei 30 Grad C. und bei 0 Grad C. ab?

13a ([74]). Ein Glascylinder von 4 cm Durchmesser im Lichten wird bei 0 Grad C. 0.5 m hoch mit Quecksilber von 0 Grad C. angefüllt.

Ausdehnungscoëfficient von:

Quecksilber	0.00018153
der Glassorte	0.00000875.

Wie hoch über der horizontalen Bodenfläche liegt der Schwerpunkt der Quecksilbermasse bei 30 Grad C.?

b ([75]). Die Dimensionen eines rechteckigen Stückes Stahl sind bei 0 Grad C.:

Breite 3 cm, Länge 100 cm, Dicke 1 cm
Spec. Gewicht des Stahles 7.8
Ausdehnungscoëfficient des Stahles 0.000012
$g = 980.88$ cm.

Wie gross ist das Trägheitsmoment des Stahlprisma's in Bezug auf die kürzeste Kante bei 0 Grad C., wie gross bei 25 Grad C.?

14 a. Wie viel mm beträgt der Unterschied im Resultat, je nachdem man den bei 30 Grad C. beobachteten Barometerstand von 760 mm mit einem beider folgenden Ausdehnungscoëfficienten auf 0 Grad C. reducirt?

Ausdehnungscoëfficient für Quecksilber 0.00018018 Dulong u. Petit,
„ „ „ 0.00018153 Regnault.

b ([53b. 64]). Folgende bei 0 Grad C. beobachtete Barometerstände sind mit Hülfe des älteren Ausdehnungscoëfficienten von Dulong und Petit $0.00018018 = \frac{1}{5550}$ auf die beigesetzte höhere Temperatur zu reduciren:

Luftdruck mm:	769	768	767	766	765	764
Reductionstemperatur:	30	29	28	27	26	25° C.
Luftdruck mm:	763	762	761	760	759	758
Reductionstemperatur:	24	23	22	21	20	19° C.

c ([66 b. 70]). Folgende bei den beigesetzten Temperaturen beobachteten Barometerstände sind auf die Temperatur 0 Grad zu reduciren. Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers, wie bei b.

Luftdruck mm:	770	740	750	730	758.5
Temperatur Grad C.:	20	10	25	−10	−13.55.

15. Folgende bei den beigesetzten Temperaturen beobachteten Barometerstände sind auf 0 Grad C. zu reduciren und dabei nicht nur auf die Ausdehnung des Quecksilbers, sondern auch auf die Ausdehnung des bei 0 Grad richtigem Massstabes Rücksicht zu nehmen, welcher einmal aus Messing, das andere Mal aus Glas bestehend, angenommen wird.

Ausdehnungscoëfficient von	Quecksilber		0.000182
„ „	Messing		0.000019
„ „	Glas		0.000008
Luftdruck:	740	750	730 mm
Beobachtungstemperatur:	10	25	-10^0 C.

16. Das specifische Gewicht folgender Körper von 20 Grad C. bezogen auf Wasser von 4 Grad C., sowie die linearen Ausdehnungscoëfficienten der Körper sind gegeben:

Platin, spec. Gew. 22.988, Ausdehnungscoëfficient 0.0000088
Kupfer, „ „ 8.868, „ 0.0000192.

Es ist das specifische Gewicht beider Körper von 0 Grad C. bezogen auf Wasser von 4 Grad C. durch Rechnung zu finden.

17. Nach Wägung von Platin und Kupfer unter Wasser von 20 Grad C. findet man durch Division des erhaltenen Auftriebs in das absolute Gewicht in der Luft in jedem speciellen Falle, ohne eine Correction anzubringen, die rohen specifischen Gewichte:

Platin, spec. Gew. 23.055
Kupfer, spec. Gew. 8.893.

Wie gross ist das specifische Gewicht der beiden Körper von 20 Grad C. nach Anbringung der Correctionen für den aërostatischen Auftrieb und in Bezug auf Wasser von 4 Grad C.?

In Bezug auf Wasser von 4^0 C. ist das spec. Gew.:

von Luft	0.0012
von Wasser von 20^0 C.	0.99827.

18. Bezogen auf die Temperatur 0 Grad des Körpers und 4 Grad C. des Wassers, sind die specifischen Gewichte von Kupfer 8.878 und von Eisen 7.799.

Wie viel Mal sind die genannten Körper bei 30 Grad C. schwerer als Wasser von 30 Grad C.

Zur Ausrechnung mögen benutzt werden:

die mittleren linearen Ausdehnungscoëfficienten für 1 Grad C. nach Dulong und Petit:

für Kupfer 0.000018115
für Eisen 0.000011820;

die Volumina gleicher Gewichtsmengen Wasser nach Jolly bei:

0 Grad C.	1.000126
4 Grad C.	1.000000
30 Grad C.	1.004234.

19. Drei Bestimmungen des specifischen Gewichtes von absolutem Alkohol haben nach Anbringung der Correctionen für den aërostatischen Auftrieb ergeben, dass Alkohol von 10 Grad C.:

0.8000 0.8013 0.8026

Mal schwerer als Wasser von 10 Grad C. sei. Das Volumen v_t des Alkohols von t Grad C., verglichen mit dem Volumen v_o desselben bei 0 Gr. C. ist nach Kopp:

$v_t = v_o\,[1 + 0.00104139\,t + 0.0000007836\,t^2 + 0.000000017618\,t^3]$.

Das specifische Gewicht des Wassers von 10 Grad C. bezogen auf Wasser von 4 Grad C. ist 0.99974.

Wie schwer ist Alkohol von 0 Grad C. in Beziehung auf Wasser von 4 Grad C., wenn man bei der Berechnung von dem Mittelwerth der drei Versuchsresultate ausgeht?

20 a. Ein Glasballon fasse

bei der Temperatur t_0 die Gewichtsmenge Quecksilber p_0;

„ „ „ t_1 „ „ „ p_1;

α sei der mittlere Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers, bezogen auf das Temperaturintervall t_0 bis t_1;

3β sei der auf das gleiche Temperaturintervall bezogene kubische Ausdehnungscoëfficient von Glas.

Wenn alle Grössen ausser 3β gegeben sind, so soll 3β als einzige unbekannte Grösse in den gegebenen Grössen ausgedrückt werden.

b ([52]). Ein in eine Spitze ausgezogener Glasballon fasse bei 0 Grad C. 1000 cbcm, wovon bei der Erhitzung bis auf 100 Grad C. 15.526 cbcm ausfliessen.

Wie gross ist hiernach der mittlere lineare Ausdehnungscoëfficient zwischen 0 und 100 Grad C., wenn für das gleiche Temperaturintervall der mittlere Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers nach Regnault 0.00018153 angenommen wird?

Ausdehnung, Druck und Gewicht bei Gasen und Dämpfen.

21. Ein Glasrohr von 0.03 qcm Querschnitt im Lichten ist an dem einen Ende offen und communicirt am andern Ende mit einer 6 cbcm haltenden gläsernen Hohlkugel. Kugel und Rohr werden nach Füllung mit trockner Luft bei 760 mm durch einen Quecksilberfaden abgesperrt, welcher bei — 40 Grad C. bis an den Zusammenstoss von Kugel und Rohr zurückgeht.

Ausdehnungscoëfficient der Luft 0.003665.

Um wie viel cm wird der Quecksilberfaden bei den Temperaturen:

-20 0 $+20$ 40 60 Grad C.

und bei 760 mm Barometerstand vom Zusammenstoss von Kugel und Rohr abstehen

a) wenn die Ausdehnung des Glases nicht berücksichtigt wird;
b) wenn für Glas der mittlere lineare Ausdehnungscoëfficient 0.0000085 angenommen wird?

22. Ein Gefäss, welches selbst keine Ausdehnung durch die Wärme erleiden möge, enthält bei 0 Grad C. das Volumen 1 an trockner Luft. Bis zu welcher Temperatur (ganze Grade) muss das Gefäss erhitzt werden, damit die beim Erhitzen ausgetriebene Luft das Volumen 0.1, 0.2 etc..... 0.9, 1.0 besitze?

Ausdehnungscoëfficient trockner Luft 0.003665.

23. Trockne Luft ist in einem Gefäss dicht abgeschlossen, welches selbst unausdehnbar durch Wärme ist. Es wird hierauf in eine der folgenden Temperaturen gebracht:

Beginnende Rothgluth.	Dunkle Rothgluth.	Helles Kirschrothglühen.	Weissglühen.	Blendendes Weissglühen.
525° C.	700° C.	1000° C.	1300° C.	1550° C.

Wie viel Atmosphären Druck (zwei Decimalen) erleidet die Gefässwand in Folge der Erhitzung bei jeder der angegebenen Temperaturen von Innen nach Aussen?

Ausdehnungscoëfficient der Luft 0.003665.

24 ([81 b. 88]). In jedem der folgenden Beispiele ist ein direct gemessenes Volum v trockner Luft, Luftdruck B und Temperatur t, wie sie bei der Messung gefunden wurden, angegeben.

Es ist durch Rechnung zu ermitteln, welche Volumina diese Luftmengen bei 0 Grad C. und 760 mm Luftdruck einnehmen würden, wenn der Ausdehnungscoëfficient der Luft 0.003665 zu Grunde gelegt wird.

$V=$	10 cbcm	15 cbcm	10 cbcm	7.5 cbcm;
$B=$	740 mm	780 mm	750 mm	730 mm;
$t=$	10° C.	20° C.	15° C.	12° C.;
$V=$	10 cbcm	12 cbcm	11 cbcm	9 cbcm;
$B=$	800 mm	380 mm	500 mm	600 mm;
$t=$	10° C.	30° C.	20° C.	$-10°$ C.

25 a. Es möge bedeuten:

v_0 ein Volumen trockner atmosphärischer Luft bei 0 Grad C. und beliebigem Druck;

v das Volumen desselben Luftquantums unter dem vorigen Drucke, aber bei der Temperatur t Grad C.;

$\alpha = 0.003665$ den Ausdehnungscoëfficienten für Luft;

T die vom absoluten Nullpunkt der Temperatur für Gase an gezählte Temperatur. Unter dem absoluten Nullpunkt wird verstanden der Temperaturgrad, bis zu welchem ein vollkommenes Gas (z. B. atmosphärische Luft) abgekühlt werden muss, damit sein Volumen, wenn das für gewöhnliche Temperaturen geltende Ausdehnungsgesetz fortgesetzte Gültigkeit hätte, sich bis zum Volumen Null zusammenzöge.

Es ist v in v_0, α und t auszudrücken, sowie der Ausdruck von v in α und T zu geben.

b. Es sei, bezogen auf 1 kg trockner, atmosphärischer Luft:

v_0 das Volumen der Luft bei 0 Grad C. und 760 mm Barometerstand (äquivalent einem Druck von 10333 kg auf 1 qm); v_0 ist in cbm ausgedrückt $\frac{1}{1.29318}$;

v das Volumen des gleichen Luftquantums bei der Temperatur t Grad C. und dem Drucke p (kg auf 1 qm).

Es ist das Product pv einmal in:

$$p_0,\quad v_0,\quad \alpha,\quad t;$$

ein anderes Mal in:

$$p_0,\quad v_0,\quad \alpha\quad T$$

auszudrücken.

26. Das specifische Gewicht trockner Luft bei 0 Grad C. und 760 mm Druck beträgt in Beziehung auf Wasser 0.0012936.

Wie viel mg wiegt ein Liter Luft unter folgenden Drücken und bei folgenden Temperaturen?

	1.	2.	3.	4.	5.	
Druck:	608	684	684	608	380	mm
Temperatur:	100	10	−10	50	10	Grad C.

Ausdehnungscoëfficient der Luft 0.003665.

27. Trockne Luft hat (760 mm Druck und 0 Grad C.) in Beziehung auf Wasser das specifische Gewicht 0.0012936 und den Ausdehnungscoëfficienten 0.003665. Das specifische Gewicht von Wasserdampf ist nahezu $\frac{5}{8}$ von demjenigen der atmosphärischen Luft von gleicher Temperatur und gleichem Drucke.

a) Wie viel mg beträgt das Gewicht von 1 Liter trockner Luft unter dem Drucke 750 mm und bei 26 Grad C.?

b) Wie viel mg beträgt das Gewicht von 1 Liter bei 26 Grad C. gesättigtem Dampfe (Spannkraft bei 26 Grad C. 25 mm)?

c) Wie viel mg beträgt das Gewicht von 1 Liter bei 26 Grad C. halbgesättigtem Dampfe (Spannkraft 12.5 mm)?

d) Wie viel mg beträgt das Gewicht von 1 Liter bei 750 mm Barometerstand ganz mit Dampf gesättigter Luft? (26° C.)

e) Wie viel mg beträgt das Gewicht von 1 Liter bei 750 mm halb mit Dampf gesättigter Luft? (26° C.)

28. Beim verbesserten Daniell'schen Psychrometer werden

bei den Lufttemperaturen 10 20 25 Grad C.
die Thaupunkte 7 15 10 „ „

beobachtet. Wie gross ist entsprechend folgender Tabelle der Spannkräfte des gesättigten Wasserdampfes

die Spannkraft des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes;
die relative Feuchtigkeit der Luft in ganzen Procenten?

Temperatur.	Spann-kraft.	Temperatur.	Spann-kraft.	Temperatur.	Spann-kraft.
5° C.	6.5 mm	15° C.	12.7 mm	25° C.	23.6 mm
6	6.9	16	13.5	26	25.0
7	7.4	17	14.4	27	26.5
8	8.0	18	15.4	28	28.1
9	8.5	19	16.3	29	29.8
10	9.1	20	17.4	30	31.6
11	9.8	21	18.5	31	33.5
12	10.4	22	19.7	32	35.4
13	11.1	23	20.9	33	37.5
14	11.9	24	22.2	34	39.6.

29. Die Beobachtungen der Temperatur t des trocknen Thermometers und der Temperatur t' des feuchten Thermometers eines August'schen Psychrometers in mässig bewegter freier Luft führen durch die Formel:

$$e = e' - 0.00074\,(t - t')\,b$$

zur Kenntniss der Spannkraft e des in der Luft zur Beobachtungszeit enthaltenen Wasserdampfes. In der Formel bedeutet:

e' die Spannkraft des der Temperatur t' entsprechenden Spannkraft in mm;

b den Barometerstand in mm.

Luft ist bei 0 Grad C. und 760 mm Druck 0.0012936 Mal schwerer als Wasser von 4 Grad C.

Bezüglich folgender zwei Beobachtungen:

Trocknes Thermometer:	30 Grad C.	30 Grad C.
feuchtes Thermometer:	20 „ „	25 „ „

wird gefragt:

a) Wie gross ist die Spannkraft der in der Luft enthaltenen Wasserdämpfe?

b) Wie gross ist die relative Feuchtigkeit der Luft in Procenten?

c) Wie gross ist die absolute Feuchtigkeit der Luft, d. h. das Gewicht des in einem cbm Luft enthaltenen Wasserdampfes in Grammen, wobei das specifische Gewicht von Wasserdampf in Beziehung auf Luft von gleichen Druck und Temperatur = 0.623 anzunehmen ist.

30. Wie hoch steht das Barometer, welches bei 0 Grad C. 750 mm zeigt, nach der Erhitzung auf 40 Grad, 60 Grad und 100 Grad C., wenn der Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers 0.00018153 angenommen wird und die Spannkräfte des Quecksilberdampfes nach Regnault

bei	0	40	60	100 Grad C.
„	0.0	0.1	0.2	0.7 mm

betragen?

31. Nach Regnault sind die Spannkräfte folgender Flüssigkeiten in mm:

Temperatur:	0 Gr.	10 Gr.	20 Gr.	30 Gr. C.
Wasser:	4.6	9.2	17.4	31.6
Alkohol:	12.8	24.3	44.5	78.5
Aether:	183.3	286.4	433.3	636.3.

Wie viel (ganze) mm muss das Barometer bei 750 mm äusserem Luftdruck noch zeigen, nachdem man eine hinreichende Quantität der Flüssigkeiten bei den angegebenen Temperaturen in das Vacuum über dem Quecksilber gebracht hat. Bei der Berechnung ist auf die Ausdehnung des Quecksilbers durch die Temperatur keine Rücksicht zu nehmen, da ihr Einfluss verhältnissmässig unbedeutend ist.

32. Die Dämpfe folgender Flüssigkeiten haben bei 100 Grad C. die Spannungen:

Wasser.	Alkohol.	Aether.	Schwefelkohlenstoff.
760	1695	4951	3330 mm.

Wird eine der genannten Flüssigkeiten im Ueberschuss bei 0 Grad C. in eine mit Luft gefüllte Flasche gebracht, diese hierauf geschlossen und in bei 760 mm siedendes Wasser gebracht, so fragt sich, wie viel Atmosphären Druck hat die Flasche von Innen nach Aussen zu ertragen?

Bewegung der Wärme.

33. Eine constante Wärmequelle bringt in 100 cm Entfernung von der Kugel eines Thermometers eine Temperaturerhöhung von 10 Grad C. hervor.

In wie viel cm Entfernung vom Thermometer wird dieselbe Wärmequelle Temperaturerhöhungen von:

2 Grad 5 Grad 8 Grad

hervorbringen?

34. Die Seitenabweichung bei einem Concavspiegel, Radius r halber Centriwinkel β, beträgt für Parallelstrahlen zur Axe $\frac{r}{2}\beta^3$.

Wie gross ist angenähert das Verhältniss des alle einfallenden Parallelstrahlen zur Axe aufnehmenden Querschnittes zu der kleinsten Fläche, durch welche sämmtliche Strahlen nach der Reflexion hindurchgehen im Allgemeinen, sowie wenn der halbe Centriwinkel:

5 Grad 10 Grad 15 Grad

beträgt? β ist auch beim allgemeinen Ausdruck so klein anzunehmen, dass noch Vertauschung von Bogen und Sinus gestattet ist.

35. Die halbe Breite einer Sammellinse sei 10 cm, ihre Brennweite für parallele Centralstrahlen 100 cm, die Längenabweichung für Randstrahlen $-\frac{5}{3}$ cm.

Wie gross ist das Verhältniss der kleinsten Fläche, durch welche sämmtliche einfallende Parallelstrahlen zur Axe gehen, zur kleinsten Fläche, durch welche die zu jenen gehörigen gebrochenen Strahlen hindurchgehen?

36. Ein prismatischer Stab von 1 qcm Querschnitt möge nur Wärme an den beiden Endquerschnitten nach Aussen gehen lassen oder von Aussen empfangen; im Uebrigen sei seine Oberfläche undurchlässig für die Wärme. Hat ein Querschnitt von 1 qcm Inhalt

0 Grad C., ein paralleler um 1 cm von vorigem entfernter Querschnitt von ebenfalls 1 qcm Inhalt 1 Grad C., so nennt man die in 1 Minute vom wärmeren Querschnitt nach dem kälteren Querschnitt gehende Wärmemenge die innere Wärmeleitungsfähigkeit der Substanz.

Folgende Wärmeleitungsfähigkeiten beziehen sich auf diejenige Wärmeeinheit, durch welche 1 g Wasser von 0 bis 1 Grad C. erwärmt wird.

	Kupfer.	Messing od. Zink.	Neusilber	Eisen.	Steinkohle.
Wärmeleitungsfähigkeit:	66	18	7	10	$\frac{7}{400}$.

Der kältere Querschnitt betrage 1 qdcm und werde auf 0 Grad C. erhalten, 1 dcm davon entfernt ist der dem vorigen gleich- und parallele Querschnitt, welcher constant auf 10 Grad. C. erhalten wird. Wie viel Calerien $\frac{1 \text{ kg Wasser}}{1 \text{ Grad C.}}$ gehen bei jeder der genannten fünf Substanzen pro Stunde vom wärmeren zum kälteren Querschnitt über?

Specifische Wärme, Schmelzwärme, Verdampfungswärme.

37. Folgende Raummengen Wasser von verschiedenen Temperaturen werden in einem Gefäss gemischt:

	Wasser-menge. Lit.	Temp.-Grad. C.	Wasser-menge. Lit.	Temp.-Grad. C.	Wasser-menge. Lit.	Temp.-Grad. C.	Wasser-menge. Lit.	Temp.-Grad. C.
1. Beispiel (96)	4	10	5	30	6	20	7	12
2. „	5	10	4	30	6	20	7	12
3. „	5	10	4	30	7	20	6	12.

Wie hoch berechnet sich die nach der Mischung sich ergebende Mitteltemperatur,

wenn das Gefäss als nicht wärmeleitend angenommen wird;
wenn der Wasserwerth des Gefässes, Rührers und Thermometers mit 1 kg in Rechnung gezogen wird und die genannten Gegenstände die Anfangstemperatur 10 Grad C. haben?

38 (98). Die Gewichte von vier Quantitäten Wasser in kg sind: m, m_1, m_2, m_3; die zugehörigen Temperaturen resp.: t, t_1, t_2, t_3.

Wie gross ist die Mitteltemperatur nach der Mischung, je nachdem man den Wasserwerth von Gefäss etc. vernachlässigt, oder

gleich w annimmt und bei Gefäss etc. die Anfangstemperatur t voraussetzt?

39 a. Setzt man, wie gebräuchlich bei Versuchen, die Wärmemenge $= 1$, welche 1 g Wasser von 0 Grad bis 1 Grad C. erwärmt, wie viel g beträgt dann der Wasserwerth von einem Rührstabe von 20 g Gewicht, je nachdem derselbe aus einem der folgenden Metalle besteht, denen die zugehörigen Zahlen für specifische Wärme beigesetzt sind.

	Eisen.	Kupfer.	Messing.	Silber.	Zinn.
spec. W.	0.114	0.0951	0.094	0.0570	0.0562.

b. Wie viel g beträgt der Wasserwerth (zwei Decimalen) eines Thermometers, welches nach der Erhitzung bis auf 50 Grad C. einer Wassermenge von 25 g und 10 Grad C, in die es gebracht wird, eine Temperaturerhöhung von:

1 1.5 2.0 Grad C.

ertheilt?

40 ([102 bis 105]). Die unbekannten Grössen x, y etc. sind in folgenden Beispielen zu bestimmen, und bei der Ausrechnung das spec. Gewicht des Quecksilbers 13.6, die spec. Wärme desselben 0.0333 anzunehmen.

([102]) Gleiche Gewichte Quecksilber von 0 Grad C. und Wasser von 100 Grad C. geben die Mischungstemperatur x;

([102]) Gleiche Gewichte Quecksilber von 100 Grad C. und Wasser von 0 Grad C. geben die Mischungstemperatur y;

([103]) z Gewichtstheile Quecksilber von 100 Grad C und 1 Gewichtstheil Wasser von 0 Grad C. geben die Mischungstemperatur 50 Grad C.;

([104]) 100 Gewichtstheile Quecksilber von 0 Grad C. und p Gewichtstheile Wasser von 100 Grad C. geben die Mischungstemperatur 50 Grad C.;

([105]) Gleiche Volumina Quecksilber von 0 Grad C. und Wasser von 100 Grad C. geben die Mischungstemperatur v;

([105]) Gleiche Volumina Quecksilber von 100 Grad C. und Wasser von 0 Grad C. geben die Mischungstemperatur w.

41. Bei vorläufigen Versuchen über die specifische Wärme von Blei, Eisen, Kupfer (oder Zink) nach der Mischungsmethode beträgt:

die Temperatur des Wassers $\vartheta = 10$ Grad C.;
das Gewicht des Wassers $P = 80$ g;
der Wasserwerth von Gefäss und Thermometer $\Pi = 4$ g;
das Gewicht des Metalles $p = 50$ g;
die Temperatur des Metalles $T = 100$ Grad C.

Nach dem Zusammenbringen des 50 g schweren Metallstückes von 100 Grad C mit dem Wasser und Ausgleichung der Temperaturen beträgt die Mitteltemperatur bei:

Blei.	Eisen.	Kupfer.
11.6 Grad C.	15.7 Grad C.	14.9 Grad C.

Wie gross ist nach diesem Versuchsergebniss die specifische Wärme c der Metalle?

Welche Zunahme Δc erleidet die specifische Wärme als Rechnungsresultat, sobald die Mitteltemperatur aus Versehen um 0.1 Grad C. zu hoch abgelesen wird?

42 a. Wie viel kg klargestossenes Eis von 0 Grad C. braucht man zur Abkühlung folgender Quantitäten Wasser von den untergesetzten Temperaturen bis auf 0 Grad C.?

Schmelzungswärme des Eises 79.4.

	1.	2.	3.	4.	5.
Wasser, kg:	39.7	13.233	19.85	5.67	13.233;
Temperatur, Grad C.:	20	18	16	14	12.

b. Wenn man dem Wasser in jedem der vorigen Beispiele nur 1 kg Eis von 0 Grad C. zusetzt, wie hoch ist die Temperatur des Wassers nach erfolgtem Schmelzen des Eises?

43. In folgenden Beispielen enthält die Rubrik:

W eine Wassermenge in kg;
t die Temperatur des Wassers in Grad C.;
n die Anzahl Grade C., um welche das Wasser durch Einbringen von klar gestossenem Eis von 0 Grad C. durch dessen Schmelzen abzukühlen ist.

	1.	2.	3.	4.	5.
Wassermenge W in kg:	10	18	8	30	40;
dessen Temperatur t in Grad C.:	30.6	20.6	10.6	90.6	70.6;
die beabsichtigte Abkühlung n in Grad C.:	10	10	10	20	30.

Wie viel kg Eis bringt in jedem Beispiele die beabsichtigte Abkühlung hervor?

44. Der Wasserwerth eines starken, eisernen Gefässes ist 0.2 kg, wie viel Schmelzwasser liefert dasselbe nach der Füllung mit 10 kg Quecksilber von:

100 80 60 40 20 Grad C.

und dem Einsetzen in einen mit gestossenem Eis von 0 Grad gefülltem Apparat durch Abkühlung bis auf 0 Grad?

Specifische Wärme von Quecksilber 0.0333, Schmelzwärme von Eis 79.4.

45. In jedem der nächsten Beispiele ist eine Wassermenge in kg angegeben, sowie ihre Temperatur t und eine höhere Temperatur T.

Wie viel kg Wasserdampf von 100 Grad C. würden dazu gehören, wenn der letztere seine Wärme vollständig mit der des Wassers ausgleichen kann, um jede der angegebenen Wassermengen von der Temperatur t auf die höhere Temperatur T zu bringen?

Verdampfungswärme des Wassers unter 760 mm Druck = 540.

	1.	2.	3.	4.	5.
$W =$	60	21	59	54	62 kg
$t =$	10	0	40	90	10 Grad C.
$T =$	40	10	50	100	20 Grad C.

46. Folgende Quantitäten Dampf von 100 Grad C., Wasser von 0 Grad C. und Eis von 0 Grad C. sind bis zu vollständiger Ausgleichung der Temperatur in Berührung. Wie gross ist die Mitteltemperatur des Schmelzwassers?

Schmelzwärme des Eises 79.4, Verdampfungswärme des Wassers 540.

	1.	2.	3.	4.	5.
Dampf von 100° C.:	1 kg	1 kg	1 kg	1 kg	1 kg
Wasser von 0° C.:	10 kg	10 kg	15 kg	12 kg	12 kg
Eis von 0° C.:	8 kg	7 kg	6 kg	5 kg	4 kg.

Aequivalenz von Wärme und Arbeit.

47. Wenn die mechanische Arbeit, welche verrichtet werden muss, um eine Masse von 1962 kg Gewicht vom Ruhezustande aus in die Geschwindigkeiten:

5 m 10 m 15 m 20 m

zu versetzen, aus der Umsetzung von Wärme hervorgehen soll, wie viel (Ganze und Zehntel) Wärmeeinheiten (bezogen auf Kilogramm und Celsius'sche Grade) werden verbraucht, um die angegebenen mechanischen Arbeiten zu verrichten?

Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit 424 Kilogrammmeter. Beschleunigung der Schwere $g = 9.81$ m.

48. Eine Masse von 19.62 kg soll 10 m senkrecht gehoben werden, wobei in folgenden fünf Beispielen Anfangs- und Endgeschwindigkeit die angeführten Werthe haben sollen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Anfangsgeschwindigkeit:	0	0	1 m	2 m	2 m
Endgeschwindigkeit:	0	1 m	2 m	2 m	4 m.

Wenn die bei der Hebung verrichtete Arbeit mit äquivalentem Verbrauch von Wärme verknüpft ist, wie viel Wärmeeinheiten (auf Kilogramm und Celsius'sche Grade bezogen) werden verbraucht (3 Decimalen)?

Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit 424, Beschleunigung der Schwere $g = 9.81$ m.

49. Wie viel (ganze) Wärmeeinheiten pro 24 Stunden, 1 Stunde, 1 Minute werden verbraucht, wenn dieselben vollständig behufs fortdauernder Leistung einer Pferdekraft (75 Kilogrammmeter pro Sekunde) umgesetzt werden?

Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit 424 Kilogrammmeter.

50. Ein Körper werde durch Zuführung von Wärme von 0 bis 1 Grad C. erwärmt. Bei der in Folge der Erwärmung erfolgenden Ausdehnung hat er den äusseren Luftdruck (p Kilogramm auf die Flächeneinheit) zurückzuschieben. Theilt man seine Oberfläche O in unendlich viele kleine Theile: O_1, O_2, O_3.... ein, welche resp. die Verschiebungen: δ_1, δ_2, δ_3.... senkrecht zu dem zugehörigen Oberflächentheilchen nach Aussen erleiden, so wird hierauf gefragt:

Welches ist der Ausdruck für die Volumsvergrösserung ΔV, die das Volumen V des Körpers bei der Temperaturerhöhung von 0 bis 1 Grad C. erleidet, in: O_1, O_2, O_3.... und: δ_1, δ_2, δ_3....?

Welches ist der Ausdruck für die bei der Ausdehnung verrichtete Arbeit L in p und den vorigen Grössen oder in p und ΔV?

51. Für Quecksilber und Eisen gelten folgende Zahlen:

	Quecksilber.	Eisen.
specifisches Gew. bei 0° C.:	13.596	7.8
specifische Wärme von 0 bis 1 Grad C. bei 760 mm Druck:	0.028	0.112
Ausdehnung von 0 bis 1 Gr. C.:	0.000179	0.0001 (linear).

Wenn 1 kg von jedem der beiden Metalle von 0 bis 1 Grad C. und zwar bei 760 mm Luftdruck erwärmt wird und diesem Luftdrucke ein Druck von 10333 kg auf 1 qm entspricht, so fragt es sich:

a. Wie viel beträgt bei jedem der genannten Metalle die Wärme, welche znr Verrichtung äusserer Arbeit (Zurückschiebung des Luftdrucks) verbraucht wird?

b. Wie gross ist die specifische Wärme von jedem der beiden Metalle im luftleeren Raume?

Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit 424 Kilogrammmeter.

52. Behufs Erwärmung folgender Luftarten (1 kg von jeder) bei constantem Volumen, sind zuzuführen:

Atmosphärische Luft	0.1685	Wärmeeinheiten
Sauerstoff	0.1551	„
Wasserstoff	2.4110	„

Würde man bei 760 mm Luftdruck diese Gase bei constantem Drucke erwärmen, so würden sie bei der Ausdehnung folgende Arbeiten verrichten:

Atmosphärische Luft	29.268	Kilogrammmeter
Sauerstoff	26.471	„
Wasserstoff	422.91	„

Wie gross ist hiernach die specifische Wärme dieser Gase bei constantem Drucke, wenn das Wärmeäquivalent = 424 angenommen wird?

53. Gestützt auf das von Horstmann angegebene specifische Gewicht von gesättigtem Wasserdampf von 100 Grad C. = 0.667 (in Bezug auf atmosphärische Luft unter gleichen Verhältnissen) findet man, dass 1 kg Wasser durch Verdampfung bei 100 Grad C. in 1.584 cbm gesättigten Dampf von 100 Grad C. verwandelt wird. Es ist ferner bekannt, dass 1 kg Wasser von 100 Grad C. 0.0010432 cbm Raum einnimmt.

Bei 760 mm Luftdruck wird auf 1 qm ein Druck von 10333 kg ausgeübt.

Wärmeäquivalent = 424, genaue Zahl für die Verdampfungswärme des Wassers bei 100 Grad C. 536.7.

Wie viel Wärmeeinheiten werden bei Verdampfung von 1 kg Wasser bei 100 Grad C. zu äusserer Arbeit (Zurückschiebung des Luftdrucks), und wie viel zu innerer Arbeit verwendet?

V. Abtheilung.

Lehre vom Magnetismus.

Tragkraft von Magneten.

1. Bedeutet:

P in kg das Gewicht eines Hufeisenmagneten von einer Form, die von der gewöhnlichen nicht allzusehr abweicht;

T in kg die nach oftmaligem Abreissen des Ankers zurückbleibende, constante Tragkraft, so gilt nach Häcker's Versuchen für einen möglichst stark magnetisirten Hufeisenmagneten von gutem Stahl die Beziehung:

$$T = 10.33 \sqrt[3]{P^2}$$

Dieselbe Formel stellt auch mit grosser Annäherung das Doppelte der bleibenden Tragkraft eines Poles eines Stahlmagneten vom Gewichte P vor.

Wie viel kg (1 Decimale) muss das Gewicht P eines Hufeisenmagneten betragen, damit nach möglichst kräftiger Magnetisirung die nach öfterem Abreissen des Ankers zurückbleibende, constante Tragkraft das

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20 fache

des Magnetgewichtes betrage?

Absolutes Mass des Magnetismus und Fernewirkung magnetischer Theile.

2. Absolutes Kraftmass. Die Kraft ist 1, welche der Masse von 1 mg (d. i. der Masse 1 cbmm Wassers von 4 Gr. C) die Beschleunigung von 1 mm pro Sekunde ertheilt.

Folgenden Massen wird die darunter bemerkte Beschleunigung ertheilt:

	1.	2.	3.	4.	5.
Masse:	5	10	15	20	25 mg
Beschleunigung pro Sekunde:	100	80	60	40	20 mm.

Wie gross ist hiernach die Kraft in absoluten Einheiten?

3. Gegeben sind in absoluten Einheiten folgende Kräfte nebst den darunter bemerkten Massen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Kraft:	10	20	50	100	98100
Masse in mg:	5	4	2.5	2	10.

Wie viel mm Beschleunigung wird jeder Masse ertheilt?

4. Wie viel mm Weg legt eine Masse in der in den Beispielen angegebenen Zeit zurück, sobald sie von der daselbst angegebenen Kraft vom Ruhezustande aus in Bewegung gesetzt wird?

	1.	2.	3.	4.	5.
Kraft:	40	50	60	70	80
Masse in mg:	4	10	30	35	20
Bewegungszeit:	2	4	6	8	10

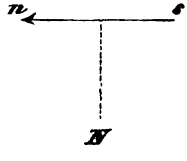
5. Die Einheit des magnetischen Fluidums stösst die in 1 mm von ihr befindliche, gleichnamige Menge mit der Kraft 1 ab; resp. zieht die in 1 mm von ihr entfernte Menge 1 des entgegengesetzten Fluidums mit der Kraft 1 an.

Im Raume befinde sich die punktförmige Masse 100 mg in Ruhe, welche mit dem Südmagnetismus 8000 beladen ist.

Wenn nun plötzlich eine der folgenden Mengen Magnetismus (Nord- +, Süd- —) in die anbei bemerkte Entfernung von obiger ruhenden Masse versetzt gedacht wird, wie viel mm Beschleunigung erhält die ruhende Masse im ersten Momente?

	1.	2.	3.	4.	5.
Magnetismus:	+1000	−800	+900	+2000	−1200
Entfernung:	40	80	60	400	40 mm.

Fig. 19.



6 ([3] b. m. [6]). Die um ihren Mittelpunkt, um eine zur Ebene der Zeichnung senkrechte Axe drehbare Gerade $ns = 100$ mm enthält:

am Ende n 100 nordmagnetische Einheiten,
am „ s 100 südmagnetische Einheiten,

auf welche das nordmagnetische Theilchen $N = 500$ einwirkt, welches sich im senkrechten Abstande:

1.	2.	3.	4.
100	50	25	12.5 mm

vom Mittelpunkt von *ns* befindet.

Wie gross ist das von *N* auf *ns* in jedem Specialfalle ausgeübte Drehungsmoment?

7. Mit Bezugnahme auf die Fig. 19. wird als Rechnungsunterlage gegeben:

die Menge Nordmagnetismus = 100 in *n*;
„ „ Südmagnetismus = 100 in *s*;
„ „ Nordmagnetismus = 500 in *N*;
„ Länge *ns* = 100 mm.

Die rechtwinklige Distanz von *N* von der Mitte von *ns* beträgt:

1.	2.	3.	4.	5.
1000	2000	3000	4000	5000 mm.

Wie gross ist das von *N* auf *ns* hervorgebrachte Drehungsmoment?

Bestimmungen an der Coulomb'schen Drehwage.

8. Bezeichnet:

i das Trägheitsmoment in *mg* eines an dem Faden der Drehwage angehängten (unmagnetischen) Körpers;

f die Kraft, mit welcher der um den Bogen 1 von der Gleichgewichtslage hinweggedrehte Körper wieder in dieselbe durch die Torsion zurückgeführt wird, in absoluten Einheiten (Hebelsarm der Kraft 1 mm);

t die Schwingungsdauer bei den drehenden Schwingungen des angehangenen Körpers in Sekunden; so gilt (auch für grosse Ablenkungsbogen) für die Torsionsschwingungen die nämliche Gleichung, wie für unendlich kleine Pendelschwingungen:

$$t = \pi \sqrt{\frac{i}{f}}.$$

Bei einer Reihe von Schwingungen mit Drähten von verschiedenen Dimensionen habe betragen:

20×10^6 *mg* das Trägheitsmoment des Anhängegewichtes; die Schwingungsdauer: 5, 10 oder 15 Sekunden.

Wie gross ist hiernach, in absoluten Krafteinheiten ausgedrückt, die am Hebelarm 1 mm wirkende Torsion, welche den um 1 Grad aus seiner Gleichgewichtslage gedrehten Draht in dieselbe wieder zurückzuführen sucht?

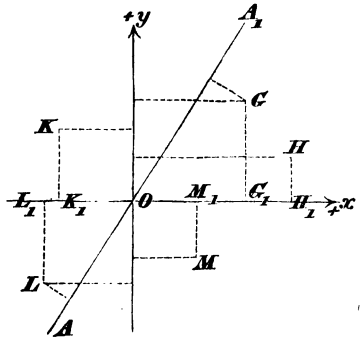
9. Coulomb hatte einen Magneten am Drahte der Drehwage so aufgehängen, dass die magnetische Axe bei untordirtem Drahte sich im magnetischen Meridiane befand. Er fand nun, dass hierauf folgende Torsionen dem Magneten die nebenbemerkten Abweichungen vom Meridian ertheilten:

Torsion:	1×360	2×360	3×360	Grad
Ablenkung:	$10\frac{1}{4}$	$21\frac{1}{4}$	33	Grad
Torsion:	4×360	5×360	$5\frac{1}{2} \times 360$	Grad
Ablenkung:	46	$63\frac{1}{2}$	85	Grad.

Wie gross (ohne Decimalen) ist hiernach bei jedem einzelnen Versuche die Directionskraft des Magneten bei rechtwinkliger Stellung gegen den Meridian, wenn die Torsionskraft des um 1 Grad aus der Gleichgewichtslage herausgedrehten Drahtes mit p bezeichnet wird?

Bestimmungen der magnetischen Axe.

Fig. 20.



10. In einer Ebene ist an an die Punkte *G, H, K, L, M etc.* (Fig. 20) magnetisches Fluidum fest gebunden. Die Ebene ist um den Punkt O, den Ursprung eines festen, in ihr liegenden, rechtwinkligen Coordinatensystemes drehbar, da in O eine gegen die Ebene der Zeichnung rechtwinklige Axe die Ebene durchdringt. In Beziehung auf die Coordinatenaxen ist in folgenden Beispielen die Lage der magnetischen Punkte gegeben, sowie die Stärke des in ihnen enthaltenen Magnetismus (m).

1.	$x=1\,\text{mm}$	$x=-1\,\text{mm}$	$x=1\,\text{mm}$	$x=-1\,\text{mm}$
	$y=100\,\text{mm}$	$y=+100\,\text{mm}$	$y=-100\,\text{mm}$	$y=-100\,\text{mm}$
	$m=60$	$m=40$	$m=-40$	$m=-60.$
2. ([15])	$x=\frac{a}{2}$	$x=\frac{a}{2}$	$x=-\frac{a}{2}$	$x=-\frac{a}{2}$
	$y=\frac{a}{2}$	$y=-\frac{a}{2}$	$y=-\frac{a}{2}$	$y=+\frac{a}{2}$
	$m=200$	$m=-800$	$m=-200$	$m=+800.$

3. (16)

$x=10$	$x=20$	$x=-60$	$x=-50$
$y=20$	$y=10$	$y=+50$	$y=+60$
$m=100$	$m=-100$	$m=200$	$m=-20.$

4. (17)

$x=\frac{a}{2}$	$x=-\frac{a}{2}$	$x=\frac{a}{2}$	$x=-\frac{a}{2}$
$y=\frac{a}{2}$	$y=-\frac{a}{2}$	$y=-\frac{a}{2}$	$y=+\frac{a}{2}$
$m=1000$	$m=1000$	$m=-1000$	$m=-1000$

5 (18).

$x=r$	$r\cos 60$	$-r\cos 60$	$-r$	$-r\cos 60$	$+r\cos 60$
$y=o$	$r\sin 60$	$+r\sin 60$	o	$-r\sin 60$	$-r\sin 60$
$-m$	$+m$	$-m$	$+m$	$-m$	$+m.$

Wenn nun plötzlich in die Verlängerung der Ebene, ohne fest mit ihr verbunden zu werden, und zwar unendlich weit von O ein sehr starker Magnetismus gelegt wird, so wird sich die Ebene so lange drehen, bis ihre magnetische Axe mit der Wirkungsrichtung dieses Magnetismus zusammenfällt.

Wie gross ist der Winkel, den die mit der Ebene fest verbundene magnetische Axe mit der Axe der x bildet?

11. Bei drei Magnetstäben mit verticaler Axe stellt sich die Mittelebene (durch die geometrische Längsaxe) so ein, dass sie mit einer festen, in der horizontalen Versuchsebene liegenden Richtung folgende Winkel bildet:

14 Gr. 13 Gr. 12 Gr.;

nach dem Umlegen des Stabes aber:

16 Gr. 12 Gr. 12 Gr.

Welchen Winkel bildet die magnetische Axe des Stabes mit der Mittelebene desselben?

Schwingungen von Magnetstäben und Horizontalintensität des Erdmagnetismus.

12. Es sei bei einem mathematischen Pendel:

t die Schwingungsdauer in Sekunden;
l die Länge des Pendels;
α der Elongationswinkel,

so wird t bekanntlich durch den Ausdruck bestimmt:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6 \tfrac{1}{2}\alpha + \ldots \right\}$$

Die beobachtete Schwingungsdauer eines horizontal schwingenden Magnetstabes ist genau 10 Sekunden; wie viel Sekunden beträgt die auf unendlich kleine Schwingungsbogen reducirte Schwingungsdauer, sobald die ganzen Schwingungsbogen des Stabes betragen haben:

5 10 15 20
25 30 35 40 Grad.

13 ([21] b. [23]). Ein rechteckiger Magnetstab von:

500 mm Länge,
25 mm Breite (horizontal),
10 mm Dicke (vertical),

7.5 specifischem Gewicht des dazu verwendeten Stahles, macht kleine Schwingungen um eine verticale, durch den Schwerpunkt gehende Axe, deren Dauer beträgt:

10 15 20 25 Sekunden.

Wie viel (ganze) Millionen Krafteinheiten beträgt das Drehungsmoment, mit welchem in den genannten Fällen der Erdmagnetismus den horizontalen, mit seiner Axe senkrecht gegen den magnetischen Meridian gestellten Stab in den Meridian zurückführen würde?

14. Bei einer in lufterfülltem Raume horizontal schwingenden Magnetnadel gilt bezüglich der Schwingungsbögen (Bogenabstände zweier benachbarter Umkehrpunkte) das Gesetz:

$$b_n = \frac{b_1}{k^{n-1}}$$

wobei:

b_1 der erste Schwingungsbogen;
b_n der n^{te} Schwingungsbogen und
k eine constante, positive Zahl ist, welche von der Beschaffenheit der schwingenden Nadel und der der Luft abhängt, in welcher die Nadel schwingt.

Bei gewöhnlicher Luft und Magnetnadeln von gewöhnlichen Dimensionen kann der Werth $k = 1.013$ vorkommen; wie viel Sekunden beträgt in diesem Falle der

3. 5. 7. 9. 11.

Schwingungsbogen, wenn der erste 5 Grad = 18000 Sekunden umfasst?

15. Der Werth der Horizontalintensität ist in absolutem Masse zu Anfang des Jahres 1874 angenähert in: .

Prag	Dresden	Leipzig	Rostock
1.96	1.92	1.89	1.81.

Wie viel Sekunden beträgt an den genannten Orten die Schwingungsdauer eines Magnetstabes, welcher gegeben ist durch:

das Trägheitsmoment = 20000×10^6 mg;

die Directionskraft bei rechtwinkliger Stellung gegen den magnetischen Meridian = 1000×10^6 absolute Einheiten (bei der Horizontalintensität 1).

16. Ein Magnetstab ist gegeben durch:

Trägheitsmoment = 20000×10^6 mg;

magnetisches Moment = 1000×10^6 absolute Einheiten.

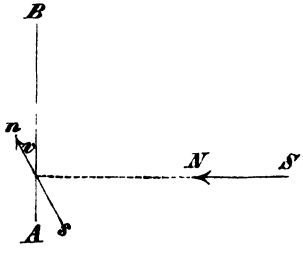
Die Schwingungsdauer des horizontal schwingenden Stabes beträgt Anfang 1874 in:

Berlin	Görlitz	Eisenach	Schwedt	
10.302	10.113	10.220	10.330	Sekunden.

Wie gross ist hiernach (nur zwei Decimalen) die Horizontalintensität des Erdmagnetismus an den genannten Orten?

17. *A.* In Fig. 21 bedeute:

Fig. 21.



NS die magnetische Axe eines horizontal gelegten Magnetstabes, welcher ablenkend auf *ns*, eine kleine horizontale Magnetnadel einwirkt, deren verticale Umdrehungsaxe durch die Mitte der Nadel geht;

AB den magnetischen Meridian;

v den Ablenkungswinkel der Magnetnadel unter gleichzeitigem Einflusse des Erd- und Stabmagnetismus.

Behufs Beantwortung nachfolgend gestellter Fragen wird gegeben:

$L = NS$ in mm die Länge des Stabes;

N die im Pole *N* befindliche Menge Nordmagnetismus oder die im Pole *S* befindliche Menge Südmagnetismus in absolutem Masse;

d in mm die Distanz der Mitte des Stabes NS von der Mitte der Nadel ns, d und die mit d zusammenfallende Linie NS sind rechtwinklig gegen den magnetischen Meridian;

$l = ns$ in mm die Länge der Nadel;

n die im Pole n befindliche Menge Nordmagnetismus oder die im Pole s befindliche Menge Südmagnetismus in absolutem Masse;

$NL = M$ das magnetische Moment des Stabes;

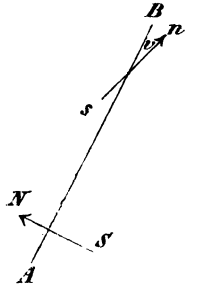
$nl = m$ das magnetische Moment der Nadel.

Wie gross sind die Drehungsmomente, welche gegen die Nadel ns ausgeübt werden:

a. vom Nordpol N; *b.* vom Südpol S; *c.* von dem ganzen Stabe NS,

wenn man bei der Entwickelung der Ausdrücke die Potenzen von $\frac{l}{d}$ und $\frac{L}{d}$ nur bis mit der dritten beibehält?

Fig. 22.



B. In Fig. 22 ist die zweite Hauptlage eines ablenkenden Magneten dargestellt, bei welcher NS nicht mit d zusammenfällt, sondern rechtwinklig gegen d und den magnetischen Meridian ist, im Uebrigen sind die Bedeutung der Buchstaben und die gegebenen Grössen dieselben als unter *A.* Auch die Fragen sind wie sub *A.*:

Wie gross sind die Drehungsmomente, welche gegen die Nadel ns ausgeübt werden:

a. vom Nordpol N; *b.* vom Südpol S; *c.* vom Stabe NS,

wenn bei der Entwickelung der Ausdrücke höhere als die dritten Potenzen von $\frac{l}{d}$ und $\frac{L}{d}$ vernachlässigt werden?

18. Mit Bezugnahme auf die Fig. 21 wird zunächst folgende Tabelle der gegebenen Grössen vorangestellt, welche sich auf das Resultat von Versuchen bezieht, wie es sich zu Anfang des Jahres 1874 mit einem und demselben Apparate zur Bestimmung der Horizontalintensität an verschiedenen Punkten des 30sten Längengrades (innerhalb Deutschland) herausstellen würde, die Zahlen beziehen sich demnach auf Ablenkungsversuche in der ersten Hauptlage (Fig. 21).

Nördliche Breite des Ortes.	Oestliche Länge von Ferro des Ortes.	Schwingungsdauer des Stabes.	Ablenkung der Nadel.
45 Gr.	30 Gr.	9.582 Sekd.	$10^0\ 32'.4$
46 „	30 „	9.672 „	$10^0\ 44'.1$
47 „	30 „	9.765 „	$10^0\ 56'.2$
48 „	30 „	9.885 „	$11^0\ 12'.0$
49 „	30 „	9.985 „	$11^0\ 25'.2$.

Das Trägheitsmoment K des ablenkenden Stabes beträgt:

$$K = 100 \times 10^6 \text{ mg}.$$

A. Wie gross ist den angegebenen Zahlen zufolge die Horizontalintensität (zwei Decimalen) zu Anfang 1874 an den genannten Orten?

B. Wie gross würde sich an den genannten Orten der Ablenkungswinkel in der zweiten Hauptlage herausgestellt haben?

19. Die Horizontalintensität beträgt Anfang 1874 angenähert in Göttingen 1.86.

Nach Lamont's magnetischen Karten (1850) ist die Horizontalintensität an folgenden Orten um die angegebenen Werthe grösser als in München:

Dresden	Göttingen	Cöln	Danzig	Königsberg
−0.10	−0.15	−0.15	−0.20	−0.20

Welchen angenäherten Werth hat hiernach die Horizontalintensität zu Anfang des Jahres 1874 in:

München, Dresden, Cöln, Danzig, Königsberg,

wenn vorausgesetzt wird, dass sich die Differenzen der Horizontalintensität zwischen München und den andern Orten seit 1850 nicht geändert haben?

20. Die Horizontalintensität ist zur Zeit $1870 + t$ in Göttingen:

$$T = 1.8497 + 0.00352\,t + 0.0000336\,t^2.$$

Wie gross ist hiernach die mittlere jährliche Zunahme für Göttingen (4 Decimalen), welche wegen der nicht zu viel verschiedenen Lage wohl auch auf das gesammte Deutschland bezogen werden kann?

(Erst für 10 Jahre zu berechnen und hieraus das Mittel für 1 Jahr zu nehmen.)

Declination.

21. Um wie viel Grad muss man an nachgenannten Orten von der Richtung des magnetischen Meridianes bis zur geographischen

Westrichtung nach links herum gehen, da die westliche Declination Anfang 1874 an denselben angenähert beträgt:

Berlin	Leipzig	Prag
$12\frac{1}{4}$ Gr.	$12\frac{2}{3}$ Gr.	$11\frac{1}{3}$ Gr.
Görlitz	Eisenach	Dresden
$11\frac{1}{4}$ Gr.	$13\frac{1}{2}$ Gr.	12 Gr.

22. Die Declination ist zur Zeit $1870 + t$ in Göttingen nach Kohlrausch:

$$D = 14^{\circ}\,29.4' - 9'.108\,t - 0'.05349\,t^2.$$

Wie viel Grad ist hiernach die mittlere, jährliche Abnahme der Declination für Göttingen (demnach auch für das nur wenig in der Lage davon unterschiedene, mittlere Deutschland). Bei der Berechnung wird am besten erst die Abnahme für 10 Jahr berechnet und hierauf durch 10 dividirt (drei Decimalen).

Inclination der Magnetnadel.

23. Der Schwerpunkt einer Inclinationsnadel liege nicht in deren Umdrehungsaxe, sondern auf der magnetischen Axe der Nadel nach deren Nordpol zu. Die Nadel wird einmal, wie sie ist, aufgelegt und hierauf nach Umkehrung der Pole, wobei sie das frühere Moment wieder erlangen möge, abermals aufgelegt. Es sei:

a die Abweichung des Schwerpunktes der Nadel nach Norden zu (auf der magnetischen Axe gemessen) in mm;
P das Gewicht der Nadel in absoluten Krafteinheiten;
M das magnetische Moment der Nadel;
H die Totalintensität des Erdmagnetismus;
i der wahre Werth der Inclination;
i_1 der beobachtete Werth der Inclination nach dem ersten Auflegen;
i_2 der beobachtete Werth der Inclination nach Umkehrung der Pole und dem zweiten Auflegen.

Wenn man nun i als unbekannte Grösse ansieht, durch welchen Ausdruck wird dieselbe aus den bekannten Versuchswerthen i_1 und i_2 berechnet?

24. Die Inclination beträgt Anfang 1874 angenähert in Göttingen 66.6 Grad. Nach Lamont's magnetischen Karten (1850) ist die Inclination an folgenden Orten um die angegebene Anzahl Grade grösser als in München:

Dresden	Göttingen	Cöln	Danzig	Königsberg
1.8	2.5	2.6	3.6	3.60.

Wie viel (ganze und Zehntel-) Grad beträgt nach allen gemachten Angaben die Inclination an den Orten:

München, Dresden, Cöln, Danzig, Königsberg

zu Anfang des Jahres 1874 unter der Voraussetzung, dass die aus Lamont's Karten herauszulesenden örtlichen Inclinationsdifferenzen bis jetzt noch keine Aenderung erfahren haben?

25. Nach Kohlrausch beträgt die Inclination in der Zeit $1870 + t$ zu Göttingen:

$$J = 66^0\,43'.0 - 1'.749\,t + 0'.01341\,t^2.$$

Wie gross ist hiernach die mittlere, jährliche Inclinationsabnahme in Bruchtheil-Graden für Göttingen (und wohl auch wegen der wenig unterschiedenen Lage für das mittlere Deutschland)? Bei der Ausrechnung die zehnjährige Abnahme durch 10 zu dividiren (drei Decimalen).

Totalintensität des Erdmagnetismus.

26. Wie gross ist zu Anfang 1874 nach den in Aufg. 19 und 24 gemachten Angaben der angenäherte Werth der Totalintensität (zwei Decimalen) an den Orten:

München, Dresden, Göttingen, Cöln, Danzig, Königsberg?

VI. Abtheilung.

Lehre von der Electricität.

Bestimmungen an der Coulomb'schen Drehwage.

1. Bei einer kleinen Versuchsreihe Coulomb's waren anfänglich die Standkugel und Kugel am Wagebalken ohne Torsion in Berührung. Nach dem Electrisiren beider ergab sich:

a. ohne Torsion, Entfernung beider von einander 36 Gr.
b. 126° Torsion, „ „ „ „ 18 „
c. 567° Torsion, „ „ „ „ 8.5 „

Wird der Radius des Wagebalkens, der die bewegliche Kugel trug, r und die Torsion bei 1 Grad p gesetzt; wie gross ist in den 3 Fällen der Aufgabe

die Grösse der electrischen Abstossung,
die Entfernung der Kugelmitten von einander,
die abstossende Kraft bei der Einheit der Entfernung.

2. Beide gleich grosse Kugeln, die Stand- und bewegliche Kugel, sind vor dem Electrisiren ohne Torsion in Berührung. Nennen wir in willkührlichem Masse ausgedrückt die Electricitätsmenge = 100, welche den in Berührung stehenden Kugeln zugeführt werden muss, damit sie in einem Abstande von 15 Gr. im Gleichgewicht bleiben, so fragt es sich, welche Electricitätsmengen hätten den in Contact stehenden Kugeln zugeführt werden müssen, wenn die Standkugel die bewegliche dauernd um:

14, 13, 12, 11, 10 Gr.

von sich hätte entfernt halten sollen? Zu bequemerer Erledigung der Rechnung soll bei dieser Bogen und Sehne zu vertauschen gestattet sein?

3. Bei jedem der folgenden fünf Versuche wird die bewegliche Kugel anfänglich der Standkugel, ohne dass beide electrisch sind, bis auf 16 Grad genähert, hierauf theilt man der beweglichen Kugel bei jedem Versuche eine und dieselbe Electricitätsmenge E mit. Wenn man hierauf der Standkugel die gleichnamige Electricität mittheilt, so bedarf es am oberen Knopf bei den fünf Versuchen folgender Torsionen, um wieder die ursprüngliche Bogendistanz von 16 Grad beider Kugeln herzustellen:

120 300 180 420 600 Gr. Torsion.

Nennt man nun in willkührlichem Masse die Electricität auf der Standkugel beim ersten Versuche 1, wie gross ist die Electricitätsmenge der Standkugel bei den nachfolgenden vier Versuchen gewesen?

4. Die Stand- und die bewegliche Kugel sind genau gleich gross; beide Kugeln sind anfänglich unelectrisch und ohne Torsion in Berührung. Zu Anfange folgender Versuche wird ihnen Electricität zugeführt und hierauf durch Torsion um:

6 Gr. 15 Gr. 26 Gr. 39 Gr. 54 Gr.

jedesmal ein Winkelabstand von 10 Grad für beide Kugeln herbeigeführt.

Bei 1 Grad Drehung beträgt die rückführende Kraft der Torsion, am Hebelsarm von 1 mm angreifend, in absoluten Einheiten 100000; der Halbmesser der Nadel ist 10 cm.

Wie gross ist, in absoluten Einheiten ausgedrückt, bei jedem Versuche die auf der Standkugel befindliche, sowie die ihr gleiche, auf der beweglichen Kugel befindliche Electricitätsmenge?

Electrischer Zustand auf der Oberfläche von Ellipsoiden und Kugeln.

5. Es möge bedeuten:

Q die ganze, auf der Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoides angehäufte Menge der Electricität;

a, b, c die Hauptaxen des Ellipsoides, welche respective mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen x, y, z zusammenfallen;

h die Dichtigkeit (Menge auf der Flächeneinheit) im Punkte x, y, z der Oberfläche.

In folgenden Beispielen ist gegeben:

A. $Q = 251327.4$ $a = 10$ mm $b = 20$ mm $c = 100$ mm

B. $Q = 1256637.1$ $a = 10$ mm $b = 20$ mm $c = 1000$ mm

C. $Q = 1256637.1$ $a = 1$ mm $b = 1$ mm $c = 1000$ mm
D. $Q = 628.32$ $a = 10$ mm $b = 10$ mm $c = 10$ mm.

Wie gross ist die Electricitätsmenge auf 1 qmm (Dichtigkeit) in den vier genannten Fällen an den Endpunkten der Axen, da im Allgemeinen (nach den Ergebnissen der Integralrechnung):

$$h = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

6. Es sei:

Q_0 die auf einer vollkommen isolirten, aber von Luft umgebenen Kugel zur Zeit Null befindliche Electricitätsmenge;

Q die auf derselben Kugel am Ende der Zeit t befindliche Electricitätsmenge;

p eine vom Feuchtigkeitszustande der Luft abhängige Constante.

Die Electricität auf der Kugel vermindert sich fortwährend in der Luft durch allmähliche Abgabe von Electricität an dieselbe, so dass am Ende der Zeit t auf der Kugel nur noch die Electricitätsmenge:

$$Q = Q_0 \times e^{-pt}$$

vorhanden ist, wobei e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und t die Zeit in Minuten bedeutet.

Wie gross ist hiernach die auf der Kugel noch vorhandene Electricitätsmenge, sowie der Electricitätsverlust nach:

10 20 30 40 100 200 Minuten,

wenn der Kugel anfänglich die Electricitätsmenge 10000 mitgetheilt worden war und die Constante p für die die Kugel umgebende, sehr feuchte Luft $p = 0.04$ beträgt?

Entladung der Electricität.

7. Bei dem Wheatstone'schen Spiegelversuch drehte sich der Spiegel 800 Mal in der Sekunde und die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Axe des Spiegels betrug 3048 mm.

A. Während der Spiegel den kleinen Bogen α (Radius 1) durchläuft, wie gross ist der Bogen, den während dess die Verbindungsebene von Spiegelaxe mit dem optischen Bilde eines leuchtenden Punktes, der vor dem Spiegel steht, durchläuft?

B. Wie viel mm beträgt während der Drehung des Spiegels um:

1 0.5 0.1 Grad,

der vom optischen Bilde des leuchtenden Punktes durchlaufene Weg, da der leuchtende Punkt von der Axe des Spiegels um 3048 mm entfernt war?

8. Als der Wheatstone'sche Spiegel 800 Umdrehungen pro Sekunde machte, wurde bemerkt (Entfernung der Lichtquelle von der Spiegelaxe 3048 mm):

A. Das optische Bild des einzelnen Entladungsfunkens erschien im Spiegel um 24 Grad in die Länge gezogen. Wie gross war hiernach die Dauer dieses Entladungsfunkens?

B. Die Verschiebung des mittleren Spiegelbildes gegen die beiden seitlichen Bilder betrug 0.5 Grad; sie rührte her vom Abfluss der Electricität durch einen 402 m langen, 1.5 mm dicken Kupferdraht.

Wie gross ist die Zeit, welche die Electricität zum Abfluss durch den 402 m langen Draht brauchte?

Wieviel Kilometer betrug die Geschwindigkeit der Electricität?

9. Feddersen erhielt bei Entladung einer Leydner Flasche durch kurzen, metallischen Schliessungsbogen, je nach der Dichtigkeit der Electricität in der Flasche die Funkendauer:

0.00004, 0.00007, 0.00010, 0.00015 Sekunden.

Wie viel Grad Länge müssten die Spiegelbilder dieser Funken bei Betrachtung im Wheatstone'schen Spiegel, der 800 Umdrehungen pro Sekunde macht, und wenn die Entfernung der Funken von der Spiegelaxe 3048 mm betrüge, haben?

10. Bei einer Batterie von 6 gleichgrossen Flaschen bewirkt die Ladung von 100 Umdrehungen der Electrisirmaschine 9 mm Schlagweite bei der Entladung. Wie viel mm Schlagweite erhält man bei Anwendung derselben Maschine und Flaschen bei:

Flaschenzahl:	4	3	8	16	4
Umdrehungszahl:	120	25	400	200	200.

11. Eine Batterie von 12 gleichen Flaschen wird durch 108 Umdrehungen einer Electrisirmaschine bis auf 6 mm Schlagweite geladen?

Wie viel Umdrehungen gehören dazu, um folgende Zahl derselben Flaschen bis auf die darunter bemerkte Schlagweite zu bringen?

Flaschenzahl:	6	8	2	18	15
Schlagweite:	9 mm	8 mm	6 mm	12 mm	15 mm.

Leitungswiderstand electrischer Ströme.

12. Wie gross ist, in Jacobi'schen Einheiten ausgedrückt, der Widerstand einer Leitung von Kupferdraht von:

	1.	2.	3.	4.
Länge:	10 m	100 m	1000 m	10000 m
Durchmesser:	1 mm	2 mm	4 mm	8 mm.

13. Wie gross ist, in Siemens'schen Einheiten ausgedrückt, der Widerstand eines Quecksilberbandes von:

	1.	2.	3.	4.
Länge:	10 m	10 m	5 m	25 m
Dicke:	0.1 mm	3 mm	1.25 mm	$1\frac{2}{3}$ mm
Breite:	20.00 —	$6\frac{2}{3}$ mm	10.00 mm	15.0 mm.

14. Die Leitungsfähigkeit des Platins ist 7 Mal geringer als die des Kupfers.

Wie gross sind, in Jacobi'schen Einheiten ausgedrückt, die Leitungswiderstände von Platindrähten, welche folgende Dimensionen haben:

	1.	2.	3.	4.	5.
Länge in mm:	10	100	50	30	20 mm.
Durchmesser in mm:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5 mm.

15. Setzt man die Leitungsfähigkeit des Silbers = 100, so ist diejenige von Kupfer 77, sowie von:

Zink	Eisen	Zinn
27	14	11.

Eine Kupferdrahtleitung soll durch eine gleich lange Leitung aus den drei zuletzt genannten Metallen ersetzt werden, ohne den Widerstand zu ändern. Wie viel Mal grösser, als bei Kupfer, muss der Querschnitt sein, damit die Widerstandsgleichheit erreicht werde?

16. Ein Kilogramm Kupfer soll zu Draht gezogen dem Strome (nach Jacobi'schen Einheiten gemessen) den Widerstand

1 10 100 1000

entgegensetzen. Wie gross muss in jedem Falle

der Durchmesser des Drahtes in mm,

die Länge des Drahtes in m

sein, wenn das spec. Gewicht des Kupfers 8.9 angenommen wird?

17. Die Widerstände der einzelnen Zweige einer fünftheiligen Zweigleitung sind:

A (24).	10	20	30	40	50
B.	4	4	6	12	24
C.	2	2	4	4	2
D.	6	6	8	8	2.4.

Wie gross ist bei jedem Beispiele der Widerstand aller fünf Zweige zusammengenommen?

18. Bei Widerstandsmessungen wurde gefunden, dass folgende Drähte gleichen Widerstand haben:

250 mm Platindraht von 0.5 mm Durchmesser und
9 m Silberdraht von 1 mm Durchmesser;
1 m Golddraht von 0.5 mm Durchmesser und
7.2 m Silberdraht von 1 mm Durchmesser;
0.5 m Alumindraht von 0.5 mm Durchmesser und
6 m Silberdraht von 1 mm Durchmesser.

Wie gross ist hiernach der specifische Leitungswiderstand des Platines, Goldes und Aluminiums, bezogen auf die Silbereinheit?

19. In einen Stromkreis werden, ausser einem Galvanometer, bei jedem einzelnen Versuche einer der folgenden drei Bleidrähte oder einer der zwei nachgenannten bekannten Widerstände eingeschalten und die Ablenkung der Galvanometernadel beobachtet; man erhielt durch:

10 Siemens Einheiten		40 Grad	Nadelablenkung
11 „ „		38 „	„
50 m Bleidraht (von 1 qmm Querschn.)		39.0 „	„
50 m Bleidraht „ „ „	„	38.8 „	„
50 m Bleidraht „ „ „	„	38.7 „	„

Es wird angenommen, dass die Widerstandszunahmen und Nadelablenkungsabnahmen wegen ihrer Kleinheit einander proportional sind und die Aufgabe gestellt, den Leitungswiderstand jedes einzelnen Bleidrahtes, sowie das arithmetische Mittel des Widerstandes der drei Bleidrahtstücken zu berechnen.

Ohm'sches Gesetz im Schliessungskreise constanter Elemente.

20. Die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes, bezogen auf die Jacobi'sche Einheit der Stromstärke und die Silbereinheit des Widerstandes sei 560, der wesentliche Widerstand desselben 16.

Acht Elemente werden verbunden zu:
einem achtflächigen Element,
zwei vierflächigen Elementen,
vier zweiflächigen Elementen,
acht einflächigen Elementen
und bei jeder Verbindungsart einer der folgenden, ausserwesentlichen Leitungswiderstände eingeschalten:
2 8 32 128.
Wie gross ist in jedem der 16 speciellen Fälle die Stromstärke im Schliessungskreise (1 Decimale)?

21. Ein Bunsen'sches Element habe, bezogen auf die Jacobi'sche Einheit der Stromstärke und auf den Widerstand eines 1 m langen und 1 mm dicken Silberdrahtes, als Einheit:
die electromotorische Kraft 1000,
den wesentlichen Widerstand 20.
Zwölf Bunsen'sche Elemente werden verbunden als:
ein zwölfflächiges Element,
zwei sechsflächige Elemente,
drei vierflächige Elemente,
vier dreiflächige Elemente,
sechs zweiflächige Elemente,
zwölf einflächige Elemente
und bei jeder Verbindungsart nach einander die ausserwesentlichen Widerstände:
2 8 15 30 60 240
eingeschalten.
Wie gross ist in jedem der 36 verschiedenen Fälle die Stromstärke?

22. Sechs Grove'sche Elemente (electromotorische Kraft von einem = 1000, bezogen auf die Jacobi'sche Einheit der Stromstärke und auf den Silberwiderstand als Einheit; wesentlicher Widerstand eines Elementes = 8) sollen in bester Weise zu Vorlesungsversuchen verbunden werden, bei denen:
ein Platindraht durch den Strom zu glühen ist, der im glühenden Zustande dem Strome den Widerstand 10 darbietet;
ein Electromagnet durch den Strom zu bilden ist; Umwindung mit 50 m, 2.5 mm starkem Kupferdraht vom spec. Leitungswiderstand 1.1;

der Strom durch einen Ampère'schen Apparat zu leiten ist, welcher den Widerstand 450 hat;

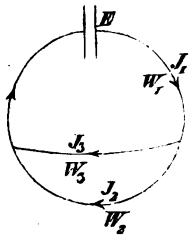
der Strom behufs Wasserzersetzung durch ein Voltameter vom Widerstande 25 zu leiten ist;

der Strom behufs Wasserzersetzung durch zwei hintereinander eingeschaltete Voltameter, jedes vom Widerstande 25 zu leiten ist.

Welche Verbindungsweise ist in jedem Falle anzuwenden?

23. Fig. 23 stellt eine constante Säule mit einfach verzweigtem Schliessungsdraht vor; es ist behufs der späteren Rechnungen:

Fig. 23.



$E = 560$ die electromotorische Kraft des verwendeten Daniell'schen Elementes, bezogen auf Jacobi'sches Mass der Stromstärke und Silbereinheit beim Widerstand;

$R = 16$ der wesentliche Widerstand innerhalb des Elementes (bezogen auf die Silbereinheit);

w_1, w_2, w_3 der Widerstand des Schliessungsdrahtes im unverzweigten Theile der Leitung und in beiden Zweigen;

J_1, J_2, J_3 die Stromstärke im unverzweigten Schliessungsbogen und in den beiden Zweigen;

W der gesammte, ausserwesentliche Widerstand.

A. Als Widerstände in den Theilen der Drahtleitung sind gegeben:

1. $w_1 = 8$ $w_2 = 8$ $w_3 = 4$
2. $w_1 = 8$ $w_2 = 8$ $w_3 = 8$
3. $w_1 = 8$ $w_2 = 8$ $w_3 = 100.$

Wie gross sind in jedem der gegebenen Beispiele die Stromstärken J_1, J_2, J_3 in den Theilen des Schliessungsbogens und der Widerstand W des gesammten Schliessungsbogens?

B. Die Widerstände im Drahte des unverzweigten Schliessungsbogens und in den Zweigen sind einander gleich $w_1 = w_2 = w_3 = x$.

Wie gross ist der Widerstand jedes Theiles der Drahtleitung, wie gross sind die Stromstärken J_1, J_2, J_3 in den einzelnen Zweigen, wenn x so gewählt wird, dass die Stromstärke ein Maximum wird?

Chemische Wirkungen des Stromes, Polarisation.

24. Acht Daniell'sche Elemente werden verbunden:

als 1 achtflächiges Element, ausserwesentl. Widerstand 2 (Silbereinheit)
als 2 vierflächige Elemente, „ „ 8 „
als 4 zweiflächige Elemente, „ „ 32 „
als 8 einflächige Elemente, „ „ 128 „

Da die electromotorische Kraft eines Elementes, auf Jacobi'sche Einheiten der Stromstärke und die Silbereinheit des Widerstandes bezogen 560 und der wesentliche Widerstand eines Elementes 16 ist, so wird in den vier Fällen der Aufgabe das Maximum der Stromstärke erhalten.

Wie viel Gramm beträgt in jedem einzelnen Falle in 24 Stunden in der geschlossenen Batterie:

der Zinkverbrauch,
die Menge des erzeugten, wasserfreien Zinkvitriols,
die Menge des erzeugten, wasserhaltigen Zinkvitriols ($ZnOSO_3 + 7HO$),
die Menge des niedergeschlagenen Kupfers?

1 cbcm Knallgas von 0°C. und 760 mm Druck wiegt 0.5363 mg? $H = 1$, $O = 8$, $Zn = 32.6$, $Cu = 31.7$, $S = 16$ sind die erforderlichen Aequivalente der Elemente.

25. Drei Ströme (I, II, III) scheiden bei der Electrolyse der betreffenden, geeigneten Salze folgende Mengen Metall in 24 Stunden aus:

I.	II.	III.
24 g Kupfer	5 g Silber	5 g Gold.

Wie gross ist nach diesen Angaben bei den drei Strömen die Stromstärke in folgenden Massen für Stromstärke ausgedrückt (zwei Decimalen)?

a. Jacobi'sches Mass. Das in 1 Minute entwickelte Knallgas in Kubikcentimetern;
b. Gewicht des in 1 Minute zersetzten Wassers in Milligrammen;
c. Gewicht des in 1 Minute niedergeschlagenen Kupfers in Milligrammen;
d. Gewicht des in 1 Minute niedergeschlagenen Silbers in Milligrammen.

1 cbcm Knallgas von 0°C und 760 mm Druck wiegt 0.0005363 g. Die Aequivalente der Elemente: $H = 1$, $O = 8$, $Cu = 31.7$, $Ag = 107.9$, $Au = 197$.

26. Zwölf Daniell'sche Elemente werden zu 12 einflächigen

Elementen verbunden und entweder ein oder zwei Voltameter eingeschalten. Es sei:

560 die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes, auf Jacobi'sches Mass der Stromstärke und auf die Silbereinheit des Widerstandes bezogen;

16 der wesentliche Widerstand eines Elementes, auf die Silbereinheit des Widerstandes bezogen;

48 der Widerstand jedes Voltameters;

1400 die electromotorische Kraft der Polarisation bei blanken Platinelectroden;

1000 die electromotorische Kraft der Polarisation bei platinirten Platinelectroden;

112 die electromotorische Kraft der Polarisation bei amalgamirten Zinkelectroden.

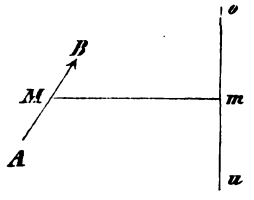
Wenn nun in jedem Falle der Widerstand der dicken Verbindungsdrähte von Batterie und Voltametern vernachlässigt wird, so wird gefragt:

Wie gross ist die Stromstärke, wenn ein oder zwei Voltameter gleicher Art in die Batterie dauernd eingeschalten werden?

Magnetische Wirkungen des galvanischen Stromes.

In Fig. 24 bedeutet AB ein unendlich kleines, vom Strome durchflossenes Theilchen eines linearen Leiters. Es ist ferner:

Fig. 24.



M die Mitte des stromdurchflossenen Theilchens;

$AB = \Delta s$ die Länge des Theilchens;

m Ort und Stärke nach absolutem Masse eines in der Entfernung r befindlichen Theilchens von freiem Magnetismus;

ABm die sogenannte Wirkungsebene;

omu ein Perpendikel in m auf der Wirkungsebene;

i die Stärke des durch AB fliessenden Stromes in beliebigem Masse;

$Mm = r$ in mm die Entfernung der Mitte des Stromtheilchens vom magnetischen Theilchen;

δ der Winkel, den die Stromrichtung in AB mit der Distanz $Mm = r$ bildet.

Ein mit dem Strome in AB, Kopf voran schwimmender Beobachter, welcher das Theilchen m ansieht, würde dasselbe bekanntlich nach links abgelenkt sehen, wenn m nördlichen, nach rechts, wenn m südlichen Magnetismus enthielte. Die Stärke des Ablenkungsstosses, den der Strom in AB auf m ausübt, ist in absoluten Krafteinheiten:

$c \frac{i \Delta s . m}{r^2} \sin \delta$, wenn i in beliebigem Masse ausgedrückt wird.

c ist dabei eine von dem gewählten Strommasse abhängige Constante.

$\frac{i \Delta s . m}{r^2} \sin \delta$, wenn i in Weber'schem magnetischem Strommasse ausgedrückt wird. Hier ist also $c = 1$.

27. Es ist die Ablenkung der Magnetnadel einer Weber-Pouillet'schen Tangentenbussole zu berechnen und sind zur Berechnung folgende Grössen gegeben:

R in mm der Radius des linearen Ringes der Tangentenbussole, dessen Ebene beim Versuche mit dem magnetischen Meridiane zusammenfällt;

i die Stärke des durch den Ring geleiteten Stromes in beliebigem Masse;

l die Länge der sehr kleinen, im Mittelpunkt des Ringes befindlichen Magnetnadel;

m die Menge des Nordmagnetismus, welche man sich am einen Ende der Nadel, sowie die Menge des Südmagnetismus, die man sich am andern Ende der Nadel denkt;

α die Ablenkung der Nadel aus dem Meridian bei durch den Ring geleitetem Strome;

T die Horizontalintensität des Erdmagnetismus am Beobachtungsorte.

28. In Berlin ist jetzt in runder Zahl die Horizontalintensität des Erdmagnetismus 1,86. Wie viel Grad und Zehntel-Grad werden die Ablenkungswinkel bei einer Tangentenbussole von einem Ringe vom mittleren Durchmesser 360 mm betragen, wenn man einen Strom von den magnetischen Intensitäten:

2 4 6 8 10

durch den Ring leitet, welcher behufs des Versuches wie gewöhnlich in den magnetischen Meridian gebracht ist?

29. Wie gross ist der Reductionsfactor einer Tangentenbussole

von n Ringen, d. h. mit welchem Factor muss man die Tangente des abgelesenen Ablenkungswinkels multipliciren, um dadurch

die Stromstärke in magnetischem Masse,

die Stromstärke in chemischem Masse

zu erhalten. Die chemische Einheit der Stromstärke ist 0.96 magnetische Einheiten. Die Reductionsfactoren sind für Bussolen von:

360 400 und 500 mm

mittlerem Ringdurchmesser und für Dresden zu berechnen, wo jetzt die Horizontalintensität des Erdmagnetismus 1.91 in runder Zahl ist.

30. Der Strom von einem Daniell'schen Elemente wird durch eine Tangentenbussole von 353.7 mm Ringdurchmesser geleitet. Es ist behufs der Berechnung gegeben:

560 die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes (bezogen auf Jacobi'sche Stromeinheit und Silbereinheit des Widerstandes);

16 wesentlicher Widerstand des Elementes;

5 Widerstand der Zuleitung zur Tangentenbussole;

1 Widerstand einer Windung des Ringes der Tangentenbussole;

1.91 Horizontalintensität in Dresden in runder Zahl zu jetziger Zeit;

0.96 magnetische Einheiten = 1 Jacobi'sche Stromeinheit.

Wie gross ist beim Durchleiten des Stromes durch die Tangentenbussole von:

1 2 3 4 5 10

Umwindungen der Ablenkungswinkel in ganzen Graden?

31. Ein Kreisring vom Radius R wirkt auf einen in seiner Axe und zwar in der sehr grossen Entfernung r von der Ebene des Ringes befindlichen kleinen, Magneten vom Momente m. Der Kreisring ist von einem Strome von der in magnetischem Masse gemessenen Stärke i durchflossen. Der Kreisring R befindet sich im magnetischen Meridiane, ist also der Nadel parallel.

a. Wie gross ist das vom Ring auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment angenähert, wenn man bei der Reihenentwickelung nach dem Binom höhere als die zweite Potenz von R, welches gegen r nur klein ist, vernachlässigt?

b. Welches Moment M muss ein Magnet haben, welcher senkrecht durch die Mitte des Ringes gesteckt, dieselbe Distanz r von der Nadel haben und dasselbe Drehungsmoment wie der Strom i auf die Nadel bewirken soll?

c) Welche Stärke in Weber'schen magnetischen Einheiten muss ein Strom haben, welcher einen aus grosser Entfernung in der ersten Hauptlage auf eine kurze Magnetnadel wirkenden Magneten ersetzen soll? Radius des gegen die Axe des Magneten rechtwinkligen Stromkreises R.

d) Eine Drahtrolle, bestehend aus 100 Windungen von 20 cm mittlerem Durchmesser, wird von den Stromstärken:

2 4 6 8 10,

in magnetischem Masse gemessen, durchflossen. Welche Momente (in Ganzen und Zehnteln der Einheit 10^6) müssen die den Strom, bezüglich der Fernewirkung, ersetzenden Magneten haben, wenn die Wirkungsdistanz von Strom und Magnet dieselbe sein soll?

e) Ein Magnetstab von 1 Kilogramm Gewicht und dem magnetischen Momente 1000×10^6 soll durch eine Drahtrolle von 500 mm Durchmesser und 500 Windungen ersetzt werden; wie gross muss die Stärke des Stromes, in magnetischem Masse ausgedrückt, sein, welcher durch die Rolle geleitet werden muss, um den beabsichtigten Effect zu erreichen?

32. Ist in der Peripherie eines horizontalen Kreises vom Radius R die Menge M von Nordmagnetismus gleichmässig vertheilt, so bewirkt ein vom Mittelpunkt des Kreises senkrecht über dessen Fläche bis zur Höhe h über dieselbe aufsteigender, geradliniger Strom von der Stärke i nach magnetischem Masse ein Drehungsmoment auf den Magnetismus in dem Kreisumfange. Für dieses Drehungsmoment, welches eine Drehung dem Zeiger einer Uhr entgegen hervorbringt, und demgemäss dem gewöhnlichen Gebrauche zufolge mit negativem Vorzeichen zu versehen ist, findet man mit Hülfe der Integralrechnung den Ausdruck:

$$-\frac{Mih}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

Die Aufgabe bezieht sich auf einen sehr dünnen, stählernen Hohlcylinder (Länge L) von kreisförmiger Basis, welcher sich um seine geometrische Axe drehen kann, am Umfange der horizontalen Basis, die Menge Südmagnetismus F und am Umfange der oberen Fläche die Menge Nordmagnetismus F enthält.

Wie gross ist das von einem Strome von der Stärke i auf den Magneten ausgeübte Drehungsmoment und wie die Drehungsrichtung:

a) Wenn der Strom von der Mitte der Basis in Richtung der geometrischen Axe bis zur Mitte der oberen Fläche aufsteigt?
b) Wenn ein Strom von der Stärke i von der Mitte des Magneten bis in die Mitte der oberen Grundfläche aufsteigt und gleichzeitig ein Strom von der Stärke i von der Mitte des Magneten bis zur Mitte der Basis herabsteigt?
c) Wenn der Strom von der Stärke i von der Mitte der oberen Fläche in Richtung der geometrischen Axe bis ins Unendliche emporsteigt?
d) Wenn der Strom von der Stärke i von der Mitte der unteren Grundfläche in der Richtung der geometrischen Axe bis ins Unendliche emporsteigt?

33. Der Ring (vom Radius R) einer Tangentenbussole ist zu Anfange eines Versuches zur Bestimmung der Stromstärke i eines durch den Ring geleiteten Stromes so gestellt, dass die Ringebene vom Nordende der Nadel um den Winkel Δ nach Westen abweicht. Die Horizontalintensität des Erdmagnetismus sei T.

Die Ablenkung der Nadel vom Meridian beträgt:

v_1 Grade, wenn der Strom in der oberen Hälfte des Ringes von Süden nach Norden geht;
v_2 Grade, wenn der Strom in der oberen Hälfte des Ringes von Norden nach Süden geht.

a) Wie gross ist hiernach die Stärke i des durch den Ring geleiteten Stromes für beliebige Werthe von Δ?
b) Wie gross ist die Stärke i des durch den Ring geleiteten Stromes bei einem so kleinen Werthe von $v_1 - v_2$, dass man unbedenklich $(v_1 - v_2)^2$ oder $sin^2 (v_1 - v_2)$ vernachlässigen darf?

Electromagnetismus.

34. Die Versuche von J. Müller zur Auffindung einer Beziehung zwischen dem magnetischen Moment eines cylindrischen Electromagneten von weichem Eisen und der Stärke des Magnetisirungsstromes wurden angestellt unter Verwendung von Kupferdraht von 2.8 mm Durchmesser zur Leitung, welcher zu einer Spirale von 4.9 cm innerem Durchmesser in 5 Lagen à 76 Windungen zusammengewunden war. Die Länge der Stäbe, welche beiderseits um 1.5 cm von der Magnetisirungsspirale überragt wurden, betrug 33 cm, ihr Durch-

messer 6 mm bis 44.5 mm. Die Axe der Spirale und des Stabes fielen zusammen. In dem später mitgetheilten, von J. Müller gefundenen Ausdrucke bedeutet:

P das Product der Windungszahl in die nach Jacobi'schem Masse gemessene Stromstärke;

d den Durchmesser des Eisenstabes in mm;

M das magnetische Moment des Stabes in absoluten, magnetischen Einheiten.

J. Müller fand:

$$\text{I.}\quad P = 425 \,.\, d^{\frac{3}{2}}\, tang.\, \frac{M}{58600\, d^2}.$$

Die Constanten der Gleichung I. sind so berechnet, dass $\frac{M}{58600\, d^2}$ nicht die Bogenlänge für den Radius 1, sondern direct die Gradzahl des Winkels giebt.

A. Wie gross ist das Maximum des Stabmagnetismus, welches bei der von J. Müller eingeschlagenen Versuchsweise Stäbe von 33 cm Länge und folgenden Durchmessern erreichen können, wenn man die Stromstärke bis ins Unbegrenzte wachsen lässt:

([57]) 10 mm ([58]) 20 mm 30 mm · ([59]) 40 mm?

Der Ausdruck des Momentes hat in Ganzen der Einheit 10^5 zu erfolgen.

B. Wie viel Stabmagnetismus in (ganzen) absoluten, magnetischen Einheiten kann man bei Stäben von 33 cm Länge und einem Durchmesser von:

10 mm 20 mm 30 mm 40 mm,

wenn in der Müller'schen Weise experimentirt wird, im Durchschnitt einem Milligramm Eisen im Maximum ertheilen, wenn das specifische Gewicht des Eisens 7.8 angenommen wird?

C. Wenn bei der Versuchsweise von Müller mit sehr schwachen Strömen gearbeitet wird, welches ist dann der Näherungsausdruck, durch den man das Moment des Stabes als Function von der magnetisirenden Kraft P und dem Durchmesser d eines 33 cm langen Stabes ausdrücken kann?

D. Wie gross muss die Stromstärke des Magnetisirungsstromes sein, wenn mit Beibehaltung des Müller'schen Versuchsganges Eisenstäben von 33 cm Länge und:

10 mm 20 mm 30 mm 40 mm

Durchmesser ein Moment ertheilt werden soll, welches resp. die

Hälfte oder zwei Drittheile des möglichen Maximalmomentes betragen soll?

35. Bei einer Versuchsreihe von W. Weber, wobei ein Eisenstab von 3.6 mm Durchmesser und 100.2 mm Länge mit einer engen, den Stab an beiden Enden überragenden Magnetisirungsspirale umgeben ward, folgten die Versuche folgendem Ausdrucke, den Wiedemann nach der Weber'schen Theorie entwickelte, und der hier mit den der Weber'schen Versuchsreihe entsprechenden, numerischen Constanten aufgeführt wird:

$$P_m = 1808 \left[1 - \tfrac{1}{3} \frac{(803.8)^2}{X^2}\right].$$

P_m ist das auf 1 mg des Stabes im Durchschnitt kommende Moment;

X ist die magnetisirende Kraft der Spirale, d. i. das Product aus der Stromstärke in magnetischem Masse in die Windungszahl.

A. Wie gross ist bei dem von Weber verwendeten Eisenstab das Maximum des Stabmagnetismus, welcher überhaupt dem Eisenstabe ertheilt werden kann?

B. Wie gross muss bei demselben Stabe die magnetisirende Kraft der Spirale genommen werden, damit der Stab die Hälfte des Maximums an Stabmagnetismus erreiche?

36. Der Thomson'sche Satz bezieht sich auf ähnliche Stäbe, welche ähnlich mit Drahtlängen bewickelt sind, so dass die Längen der Umwickelungsdrähte sich verhalten, wie die Quadrate der linearen Dimensionen. Werden nun diese Electromagnete, deren Spiralen von Strömen gleicher Stärke durchflossen werden, in ähnliche Lage gegen eine kleine Magnetnadel gebracht, so muss die Einwirkung der Stabmagnetismen auf die Magnetnadel gleich gross sein.

Wie gross ist das Moment von zwei Stäben, welche resp.

10 mm Durchmesser und 165 mm Länge,

$6\frac{2}{3}$ mm Durchmesser und 110 mm Länge

besitzen, wenn man ausgeht von einem stabförmigen Electromagneten (weiches Eisen) von:

20 mm Durchmesser und 330 mm Länge,

welchem bei ähnlicher Anordnung, wie bei den Müller'schen Versuchen von einem Strome von der Stärke 100 in Jacobi'schen Einheiten ungefähr das Moment 1050×110^6 (absolute Einheiten) ertheilt

werden würde, welche Stromstärke auch für den Magnetisirungsstrom der beiden in Frage kommenden Electromagneten anzunehmen ist.

37. Bei Versuchen mit einem stabförmigen Electromagneten von 328.4 mm Länge und 47.4 mm Durchmesser wurde gefunden, dass die Vertheilung des freien Magnetismus durch folgenden Ausdruck dargestellt werde:

$$y = 10^{-6}[(1.1522)^x - (1.1522)^{-x}].$$

Es bedeutet in diesem Ausdruck:

y die Menge freien Magnetismus (in einem willkührlichen Masse) eines Querschnittes des Stabes;

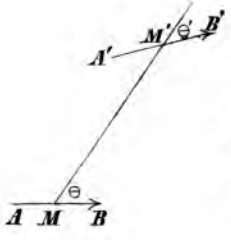
x die Entfernung dieses Querschnittes vom Mittelpunkt des Stabes in mm.

Wie gross ist hiernach die Menge des freien Magnetismus an Stellen des Stabes, welche von dessen Mittelpunkt die Entfernungen besitzen:

0 100 125 150 162.4 mm?

Gegenseitige Einwirkung von Stromleitern.

Fig. 25.



Der Ausdruck:

$$-\frac{i\,i'\,ds\,ds_1}{r^2}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta')$$

bedeutet nach Ampère die Kraft in absoluten Einheiten, mit welcher zwei unendlich kleine Stromleiter jeder auf den andern aus der Ferne einwirken; ein negatives Vorzeichen entspricht einer anziehenden, ein positives Vorzeichen entspricht einer abstossenden Kraft. Mit Bezugnahme auf Fig. 25 bedeuten:

$ds = AB$ den einen Stromleiter in mm;

$ds_1 = A'B'$ den andern Stromleiter in mm;

$r = MM'$ in mm, die Verbindungsgerade der Mitten beider Stromelemente;

i die Intensität des durch $AB = ds$ fliessenden Stromes in electrodynamischen Einheiten;

i' die Intensität des durch $A'B' = ds_1$ fliessenden Stromes in demselben Masse;

ε den Winkel, den die Richtung von ds mit der von ds_1 bildet;
Θ den Winkel, den $AB = ds$ mit $MM' = r$ bildet;
Θ' den Winkel, den $A'B' = ds_1$ mit $MM' = r$ bildet.

38 ([71]). Ein Stromleiter in Gestalt eines Kreisringes vom Radius r wird von einem Strome von der Stärke i durchlaufen; durch den Mittelpunkt wird ein anderer Stromleiter in Form einer Geraden senkrecht gegen die Kreisebene hindurchgeführt, welcher zu beiden Seiten letztere um das Stück $\frac{1}{2} l$ überragt und den Strom i' leitet.

Wie viel absolute Einheiten beträgt die Einwirkung vom Kreisring (i) auf den geraden Leiter (i') und umgekehrt?

39. Welche Einwirkung hat ein Stromtheilchen von 1 mm Länge auf ein anderes Stromtheilchen von 1 mm Länge, welche beide einem und demselben geradlinigen Strome von der Intensität 100 (electrodynamisch) angehören und deren Mittelpunkte 100 mm Entfernung von einander besitzen?

Wie gross ist ferner die Einwirkung, wenn man sich die Stromrichtung in dem einen Stromelement von 1 mm Länge umgekehrt denkt?

40. Man denke sich in den Axen eines Coordinatensystems der Ebene Ströme so fliessen, dass der Strom in der X-Axe und der in der Y-Axe entweder

beide nach dem Coordinatenanfang hinfliessen oder beide vom Coordinatenanfang wegfliessen,
oder der eine nach dem Coordinatenanfang hin, der andere von ihm wegfliesst.

Wie gross ist in jedem Falle die Einwirkung eines Elementes von 1 mm Länge des X-Stromes auf ein Element von 1 mm Länge des Y-Stromes, wenn die Coordinaten der Mittelpunkte beider Elemente resp. $x = 50\sqrt{2}$ und $y = 50\sqrt{2}$ sind und jeder der beiden Ströme die Stärke (electrodynamisch) = 100 hat?

41. Zwei Stromelemente von 1 mm Länge, jedes und beide vom Strome von der electrodynamisch gemessenen Stärke = 100 durchlaufen, sind parallel und rechtwinklig auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, welche 100 mm Länge hat.

Welche Wirkung hat das eine Element auf das andere, sobald die Ströme in beiden gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind?

Wanderung von Electricität und Wärme durch den Schliessungskreis.

42. Ein Daniell'sches Element habe, bezogen auf Jacobi'sche Einheiten der Stromstärke und auf den Widerstand eines Silberdrahtes von 1 m Länge und 1 mm Durchmesser, als Einheit die electromotorische Kraft 560 und den wesentlichen Widerstand 16. Das Element wird durch die Widerstände:

12 40 96

geschlossen.

Es ist aus folgenden Prämissen zu berechnen, wie gross in jedem der drei genannten Beispiele die Menge der positiven Electricität sei, welche sich in der Zeit $\frac{1}{10^9}$ Sekunde durch einen Querschnitt bewegt und wie gross die ihr gleiche Menge negativer Electricität, die sich der vorigen entgegen bewegt?

1 Jacobi'sche Einheit der Stromstärke = 0.96 magnetischen Einheiten.

1 magnetische Einheit der Stromstärke = 155370×10^6 mechanischen Einheiten.

43. Wie in voriger Aufgabe wird von einem Daniell'schen Elemente Ausgang genommen, welches auf Jacobi'sche Stromeinheiten und die Silbereinheit des Widerstandes bezogen, die electromotorische Kraft 560 und den wesentlichen Widerstand 16 hat. Es wird ebenso wie vorhin angenommen, dass das Element durch Leiter von den Widerständen:

12 40 96

geschlossen werde.

Es ist auf zweierlei Weise und zwar entweder aus den sub A. oder sub B. gegebenen Prämissen zu berechnen, wie viel im geschlossenen Elemente in 1000 Minuten Wärmeeinheiten (Kilogramm, Grad C.) infolge des Stromes entwickelt werden.

A. Die Aequivalente, die bei der Berechnung vorkommen:
$H = 1$, $O = 8$, $Zn = 32.6$;
0.5363 mg Gewicht eines cbcm Knallgas von 0^0 und 760 mm;
769 Wärmeeinheiten (Gramm, Grad C.) beträgt nach Joule's Versuchen die bei Auflösung von 1 Gramm Zink in der Kette, verbunden mit den damit zusammenhängenden chemischen Actionen entwickelte Wärmemenge.

B. Berechnung aus der Stromarbeit:

1 chemische Stromeinheit = 0.96 magnetischen Stromeinheiten;

1 Siemens'sche Widerstandseinheit = 9705×10^6 magnetischen Widerstandseinheiten = 46.57 Silbereinheiten;

424 Kilogrammmeter Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit;

9810 mm Beschleunigung der Schwere.

II. Theil.

Auflösungen.

I. Abtheilung.

Mechanische Naturlehre.

Kräfte, welche in gleicher und gerade entgegengesetzter Richtung an einem Punkte angreifen.

1.

	1 (1).	2.	3.	4.	5.	6 (2).	7.	8.	9.	10.
$x =$	25	10	50	20	5	2	5	3	1	0.

2.

	1. (3)	2.	3.	4.	5.
$x = y =$	105	5	12	0	0.

3.

	1. (4)	2.	3.	4.	5.
$x =$	69	81	15	90	24
$y =$	46	7	10	15	5.

4.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$X =$	37.5	60	140	40	40	2500	70	60	36	108
$Y =$	62.5	80	150	15	140	1500	40	55	2	8.

5.

1 (7)	7	14	28	56	112	224	
2)	2	6	10	14	18	22	
3)	20	16	12	8	4	4	
4)	0	3	6	9	15	21	
5)	22	26	34	38	46	58.	

6.

	Gruppe der gleichgerichteten Kräfte:			Gruppe der entgegengesetzt gerichteten Kräfte:		
1)	6	18	30	$1\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	5
2)	45	90	135	24	30	36
3)	100	120	140	8	6	4
4)	384	320	384	170	204	170
5)	180	144	108	36	24	12.

Zwei unter einem rechten Winkel an einem Punkte angreifende Kräfte.

7.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$R =$	5	13	17	29	37	53	65	65	89	85.

8.

	1.	2.	3.	4.	5
$R =$	10	$10\sqrt{2}$	1	4	2
(P, R) Grad	60	45	75	75	$22\frac{1}{2}$
(Q, R) Grad	30	45	15	15	$67\frac{1}{2}$
	6.	7.	8.	9.	10
$R =$	8	$8\sqrt{2}$	2	1	8
(P, R) Grad	30	45	15	$67\frac{1}{2}$	$67\frac{1}{2}$
(Q, R) Grad	60	45	75	$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$.

9. Winkel der Resultante

	1 (11).	2.	3.	4.	5.
mit der grösseren Kraft, Grad, Minuten:	23° 12′	26° 34′	33° 41′	38° 40′	29° 45
mit der kleineren Kraft, Grad, Minuten:	66° 48	63° 26	56° 19	51° 20	60° 15
		6.	7.	8.	9.	10.
mit der grösseren Kraft, Grad, Minuten:	39° 48	41° 11	41° 38	41° 59	42° 16
mit der kleineren Kraft, Grad, Minuten:	50° 12	48° 49	48° 22	48° 1	47° 44.

10.

1 (12).	2.	3.	4.	5.
42.26	57.36	70.71	81.92	25.88
90.63	81.92	70.71	57.36	96.59
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
8.72	17.36	34.20	50.00	64.28
99.62	98.48	93.97	86.60	76.60
11 (15).	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
999.8	999.4	998.6	997.6	996.2
17.5	34.9	52.3	69.8	87.2
16.	**17.**	**18.**	**19.**	**20.**
994.5	992.5	990.3	987.7	984.8
104.5	121.9	139.2	156.4	173.6.

11. Die Componenten sind gleich R, multiplicirt mit:

1 (14).	2.	3.	4.	5.
$\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\cos b$	$\frac{m\sqrt{2}+n}{\sqrt{4m^2+2n^2}}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{1+a_2}}$	$\sin$ b	$\frac{m\sqrt{2}-n}{\sqrt{4m^2-2n^2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

6.	7.	8.	9.	10.
$\frac{44}{125}$	$\frac{48}{73}$	$\frac{155}{493}$	$\frac{145}{433}$	$\frac{185}{697}$
$\frac{117}{125}$	$\frac{55}{73}$	$\frac{468}{493}$	$\frac{408}{433}$	$\frac{672}{697}$.

12.

	1 (16).	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$X=$	30	48	88	144	84	5	8	15	20	66.

13.

	1.	2.	3.	4.	5.
Grad, Minuten:	$84^0\,16'$	$78^0\,28'$	$72^0\,33'$	$66^0\,25'$	$60^0\,0'$
	6.	7.	8 (13).	9.	10.
Grad, Minuten:	$53^0\,8$	$45^0\,34$	$36^0\,52$	$25^0\,51$	0^0.

14. Werden allgemein die Zunahmen von P und R mit $\triangle P$ und $\triangle R$ bezeichnet, so ist der Näherungsausdruck für $R+\triangle R$:

$$R+\triangle R=\sqrt{P^2+2P\triangle P+Q^2}=\sqrt{P^2+Q^2}\sqrt{1+\frac{2P\triangle P}{P^2+Q^2}}$$

oder:

$$R+\triangle R=R\left[1+\frac{P\triangle P}{R^2}\right]=R+\frac{P\triangle P}{R},$$

daher: $\triangle R=\frac{P\triangle P}{R}$ im Allgemeinen oder: $\frac{1}{10000}\frac{P^2}{R}$ im Besonderen.

15. Auf dem in Aufl. 14 eingeschlagenen Wege findet man leicht $\triangle R=\frac{1}{10000}R$.

16. Die Verminderung beträgt in Zehntausendtheilen:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2	2	4	19	4	17	19	29	19	17.

17. 1) Die $tg\ (P,R)$ nimmt um den zehntausendsten Theil ihres Werthes ab.

2) $\triangle tg\ \alpha$ ist aus 1) bekannt, und es ist hieraus $\triangle\alpha$ zu berechnen. Die Definition für $\triangle tg\ \alpha$ ist behufs der Ableitung aus $\triangle\alpha$:

$$\triangle tg\ \alpha=\frac{\sin(\alpha+\triangle\alpha)}{\cos(\alpha+\triangle\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Da nahezu $sin \triangle \alpha = \triangle \alpha$ und $cos \triangle \alpha = 1$, so kann für $\triangle tg\,\alpha$ der Näherungswerth gesetzt werden:

$$\triangle tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha + cos\,\alpha \,.\, \triangle \alpha}{cos\,\alpha \,.\, - sin\,\alpha \,.\, \triangle \alpha} - \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

$$= \frac{\triangle \alpha}{cos^2 \alpha\,[1 - tg\,\alpha \triangle \alpha]} = \frac{\triangle \alpha}{cos^2 \alpha}\,[1 + tg\,\alpha \triangle \alpha]$$

oder:

$$\triangle tg\,\alpha = \frac{\triangle \alpha}{cos^2 \alpha} = \triangle \alpha\,(1 + tg^2 \alpha).$$

In den hieraus folgenden Werth $\triangle \alpha = \frac{\triangle tg\,\alpha}{(1 + tg^2 \alpha)}$ die Substitutionen $\triangle tg\,\alpha = -\frac{1}{10000}\,\frac{Q}{P}$ und $tg\,\alpha = \frac{Q}{P}$ gemacht, erhält man schliesslich:

$$\triangle \alpha = -\frac{1}{10000} \cdot \frac{PQ}{P^2 + Q^2}.$$

3) Um die Winkelzunahme in Minuten zu erhalten, ist der vorige Ausdruck noch mit der Anzahl Minuten, welche auf die Bogenlänge 1 kommen, zu multipliciren, d. i. mit $\frac{21600}{2\pi}$, und giebt hierauf:

$$\triangle \alpha = -\,0.3438 \times \frac{PQ}{P^2 + Q^2} \text{ Minuten.}$$

Zwei unter einem beliebigen Winkel an einem Punkte angreifende Kräfte.

18. Die Grösse der Resultante ist:

1 ([17]).	2.	3.	4 ([18]).	5.
184.78	184.77	184.79	173.21	173.19
6.	7 ([19])	8.	9.	10.
173.22	$1.5\,P$	$1.4998\,P$	$1.5002\,P$	$1.4140\,P$
11.	12 ([20]).	13.	14.	15.
$1.4144\,P$	$1.1\,P$	$1.0997\,P$	$1.1002\,P$	P
16.	17.	18.	19.	20.
$0.9997\,P$	$1.0003\,P$	$0.7654\,P$	$0.7651\,P$	$0.7656\,P$
21.	22.	23.	24.	
$0.5176\,P$	$0.5174\,P$	$0.5179\,P$	$0.0003\,P$.	

	1 (21).	2.	3.	4.	5.
19.	82°49′	82°49′	82°49′	82°50′	82°50.

	1.	2.	3.	4.	5 (37).
20.	62.74	63.46	64.71	66.51	68.96
	6.	7.	8.	9.	10.
	72.17	76.30	81.59	88.39	97.23
	11.	12.	13.	14.	15.
	108.97	125.00	147.89	182.74	241.48
	16.	17.			
	359.93	717.11.			

		1.	2.	3.	4.	5.
21.	Grad, Minuten:	0°0′	33°33′	44°25′	51°19	56°15′
		6 (36).	7.	8.	9.	10.
	Grad, Minuten:	60°0	75°31	80°24	82°49	84°16
		11.	12.	13.	14.	15.
	Grad, Minuten:	85°13	85°54	86°25	86°49	87°8.

		1.	2.	3.	4.	5.
22.	Grad, Minuten:	60°0	75°31	79°43	80°24	82°49
		6.	7.	8.	9.	
	Grad, Minuten:	84°16	85°13	85°54	86°49.	

		1.	2.	3.	4 (39).	5.
23.	Grad, Minuten:	0°	60°0	70°32	75°31	78°28
		6.	7.	8.	9.	10.
	Grad, Minuten:	80°24	81°47	82°49	83°37	84°16.

24. Die Resultante zweier Kräfte, jede $= P$, welche den Winkel α einschliessen, ist:

$$R = 2\,P \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die Zunahme $\triangle\alpha$ von α bedingt für R die Zunahme:

$$\triangle R = 2P\,[\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \triangle\alpha) - \cos \tfrac{1}{2}\alpha]$$

oder angenähert:

$$\triangle R = 2P\,[\cos \tfrac{1}{2}\alpha - \sin \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \tfrac{1}{2}\triangle\alpha - \cos \tfrac{1}{2}\alpha],$$

d. i. auch

$$\triangle R = -\triangle\alpha \,.\, P \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Da $3^1/_2$ Minute beim Radius 1 einem Kreisbogenstück von:

$$3.5 \times \frac{2\pi}{21600} = 0.001$$

entspricht, so wird $\triangle R$ bei sämmtlichen fünf Beispielen:

$$\triangle R = -0.1 \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

und ergiebt somit:

für $\alpha =$	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0
	-0.03	-0.05	-0.07	-0.09	-0.1.

25. Wenn jede der gleichen Componenten P, welche unter dem Winkel α gegen einander geneigt sind und die Resultante R haben, um $\triangle P$ zunimmt und der Winkel α um $\triangle \alpha$ vergrössert wird, so ist:

$$\triangle R = 2(P + \triangle P)\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \triangle \alpha) - 2P\cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Hierfür kann man mit Vernachlässigung der Potenzen von $\triangle P$ und $\triangle \alpha$, die über die erste hinausgehen etc., den Näherungswerth setzen:

$$\triangle R = -P \triangle \alpha \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha + 2 \triangle P \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die Bedingung $\triangle R = 0$ liefert nun den Werth:

$$\triangle P = \tfrac{1}{2} P \triangle \alpha \, tg \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Da in Bogenmass $\triangle \alpha = 0.001$ ist, so nimmt der Ausdruck zur Ausführung der Rechnung die Form an:

$$\triangle P = \tfrac{1}{2} \times 0.1 \, tg \tfrac{1}{2}\alpha$$

und führt zu den Auflösungen:

für $\alpha =$	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0
$\triangle P =$	0.01	0.03	0.05	0.09	0.19.

26. Die Grösse der Resultante ist:

1.	2.	3 ([23]).
9	2.25	$P + \alpha Q$

4.	5.	6.	7.	8 ([24]).
1.2	10.1	10.4	10.2	$P + 0.1\,Q$

9.	10.	11.	12.	13 ([25]).
27	14	12	11	$P + \frac{1}{3} Q$.

27. Die Grösse der Resultante ist:

1.	2.	3.	4 ([22]).
2.5	2.0	1.5	$P + \frac{1}{2} Q$.

28. A. Es gehören folgende von den Kräften 100 und 50 eingeschlossene Neigungswinkel und Resultanten zusammen:

Winkel beider Kräfte $= 45^0 +$	$0'$	$4'$	$8'$	$12'$	$16'$	$20'$
$R = 139 +$	0.90	0.87	0.84	0.81	0.78	0.75.

B. Die Kräfte 10 und 1 haben die Resultante:

bei $87^0 6'$ bis $87^0 8'$ $R = 10.100$
„ $87^0 9'$ „ $87^0 12'$ $R = 10.099$
„ $87^0 13'$ „ $87^0 15'$ $R = 10.098$.

C. Den Kräften 6 und 3 entspricht je nach dem von ihnen eingeschlossenen Neigungswinkel die Resultante:

Winkel von 96° und	Resultante.	Winkel von 96° und	Resultante.	Winkel von 96° und	Resultante.
23′	6.403	39′	6.390	55′	6.376
27′	6.400	43′	87	59′	73
31′	6.397	47′	83	60′	73
35′	6.393	51′	80.		

D. Je nach dem eingeschlossenen Winkel ist die Resultante der Kräfte 100 und 50:

Winkel der Kräfte =	145° +	0′	4′	8′	12′	16′	20′
Resultante =	65 +	0.64	0.59	0.54	0.49	0.44	0.38.

29. A. Es correspondiren die von den Kräften 100 und 50 eingeschlossenen Neigungswinkel und die folgenden:

Winkel der einen Kraft mit der andern:	Winkel der grösseren mit der Resultante:	Winkel der kleineren mit der Resultante:
45° 0′	14° 38′	30° 22′
4	40	24
8	41	27
12	42	30
16	43	33
20	45	35.

D. Es correspondiren die von den Kräften 100 und 50 eingeschlossenen und die von den letzteren mit der Resultante gebildeten Winkel

Winkel der einen Kraft mit der andern:	Winkel der grösseren mit der Resultante:	Winkel der kleineren mit der Resultante:
145° 0′	25° 54′	119° 6′
4′	53	11
8′	51	17
12′	50	22
16′	48	28
20′	47	33.

30. Die Cosinus des Neigungswinkels der Kräfte sind:

1.	2 (35)	3 (25)	4.	5.	6.
1	$\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\frac{Q}{P}$	$\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\frac{Q}{P}$	$\frac{1}{4}-\frac{15}{32}\frac{Q}{P}$	$\frac{1}{5}-\frac{12}{25}\frac{Q}{P}$	$\frac{1}{n}-\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}\frac{Q}{P}$

7.	8.	9.	10.	11.	12.
-1	$-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\frac{Q}{P}$	$-\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\frac{Q}{P}$	$-\frac{1}{4}-\frac{15}{32}\frac{Q}{P}$	$-\frac{1}{5}-\frac{12}{25}\frac{Q}{P}$	$-\frac{1}{n}-\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}\frac{Q}{P}$.

31. A. Die Componenten der Kraft 100 sind:

1 (40).	2.	3.	4.	5.
68.40	77.79	83.91	88.45	65.27
34.73	27.01	22.67	20.05	44.65.

6.	7.	8.	9.	10.
74.22.	81.52	68.40	77.79	113.72
39.49	36.40	53.21	50.77	74 22.

32. Die der Resultante 100 anliegenden Winkel sind:

1 (43).	2.	3.	4 (44).
$54^0 54'$	50^0	50^0	$97^0 11'$
$10^0 29$	20^0	10^0	$41^0 25$.

33. 1) Man entnimmt aus folgenden Gleichungen zunächst die Cosinus der qu. Winkel:

$$Q^2 = P^2 + R^2 - 2PR\cos[P,R]$$
$$P^2 = Q^2 + R^2 - 2QR\cos[Q,R].$$

Die Umrechnung der Ausdrücke für die Cosinus in die für die Tangenten ergiebt hierauf, wenn man die Abkürzung einführt:

$$W = \sqrt{\{(P+R+Q)(P+R-Q)(P-R+Q)(-P+R+Q)\}},$$

I. $tg[P,R] = \dfrac{W}{R^2+P^2-Q^2}$, Ia. $tg[Q,R] = \dfrac{W}{R^2-(P^2-Q^2)}$;

2) indem man im Vorigen $P = 2Q$ setzt, wird:

II. $tg[P,R] = \dfrac{W}{R^2+3Q^2}$, IIa. $tg[Q,R] = \dfrac{W}{R^2-3Q^2}$,

$$W^2 = (9Q^2 - R^2)(R^2 - Q^2);$$

3) Einsetzung von $P = nQ$ in die allgemeinen Ausdrücke ergiebt:

III. $tg[P,R] = \dfrac{W}{R^2+(n^2-1)Q^2}$, IIIa $tg(Q,R) = \dfrac{W}{R^2-(n^2-1)Q^2}$,

$$W^2 = [(n+1)^2Q^2 - R^2][R^2-(n-1)^2Q^2];$$

4) die Werthe: $Q = \dfrac{R}{n}$ und $P = R$ in die allgemeinen Ausdrücke substituirt, ergeben:

$$tg[P,R] = \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n^2-1}, \quad tg[Q,R] = \sqrt{4n^2-1}.$$

34 a (46). I. $R = 2\sqrt{A^2 - G^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$; unter Berücksichtigung der Gleichung $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$, wo $a = [Q,R]$, $b = [P,R]$ genommen wird, findet man leicht:

I. a) $\cos\frac{1}{2}\{[Q,R]-[P,R]\}=\frac{A\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{A^2-G^2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}}$;

b) II. $tg\frac{1}{2}\{[Q,R]-[P,R]\}=\frac{P-Q}{P+Q}tg\frac{1}{2}\alpha=cotg\,[\frac{\pi}{4}+\varphi]\,tg\frac{1}{2}\alpha$;

c) III. $R=\frac{P-Q}{\cos\lambda}\quad\sin\alpha\{Q,R-P,R\}=\frac{P+Q}{P-Q}\sin\alpha\cos^2\lambda$

$$=\frac{P+Q}{R}\sin\alpha\cos\lambda.$$

35. a) Zieht man folgende zwei Gleichungen:

$$(R+\triangle R)^2=P^2+Q^2+2PQ\cos(\alpha+\triangle\alpha)$$
$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$$

von einander ab, nachdem man bei der Ausrechnung $(\triangle R)^2=0$, $\cos\triangle\alpha=1$, $\sin\triangle\alpha=\triangle\alpha$ gesetzt hat, so erhält man:

$$\triangle R=-\frac{PQ}{R}\sin\alpha\triangle\alpha;$$

b) die Abnahme der Resultante beträgt beim Uebergang des Winkels von 90° in 90° 3.5′:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
0.005	0.007	0.015	0.012	0.024.	$0.001\times\frac{P.Q}{R}$;

c) $\triangle R=\triangle P.\cos\frac{1}{2}\alpha$;

Zunahme des Winkels an der unveränderten Kraft:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\triangle P}{P}tg\tfrac{1}{2}\alpha;$$

Zunahme des Winkels an der vergrösserten Kraft:

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\triangle P}{P}tg\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Mehr als zwei an einem Punkte angreifende Kräfte.

36. Durch Zerlegung jeder Kraft in:
eine Componente in Richtung der positiven X-Axe,
eine Componente senkrecht gegen die positive X-Axe
und Vereinigung der Componenten, wird die Zurückführung des Systemes auf zwei unter einem rechten Winkel an einem Punkte wirkende Kräfte erzielt und hierauf erhalten:

		Resultante.	Winkel XR.
A.	1 (47).	5.1463	90°
	2.	1.0000	0°.

B.

1 (48).		2.		3.	
Resultante.	Winkel m. X.	Resultante.	Winkel m. X.	Resultante.	Winkel m. X.
146.2	141°5′	11.39	94°48′	7.254	138°16′.

37.	1 (49).	2.	3 (50).	4.	5.
$R=$	173.2	$1.732\,R$	5.385	10	13
$XR=$	54°44′	54°44′	68°12′	64°54′	76°39′
$YR=$	54°44′	54°44′	56°9′	55°33′	72°5′
$ZR=$	54°44′	54°44′	42°2′	45°0′	22°36′.

38. $X=146.8$, $Y=91.61$, $Z=130.5$, $R=216.7$.

39. A. Die Formel $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}$, wobei das Vorzeichen aus der Aufgabe zu bestimmen ist, führt zunächst zur vollständigen Kenntniss aller von den Kräften mit den Coordinatenaxen gebildeten Winkel und hierauf auf bekannte Weise zu dem Resultate:

	1 (52).	2.	3.	4.
$X=$	599.3	-399.3	-213.6	$+213.6$
$Y=$	415.4	-115.4	-141.8	-415.4
$Z=$	159.7	-507.9	-507.9	-507.9.

B (53). $X=100$, $Y=0$, $Z=-100\sqrt{2}=-141.4$,

$$R=100\sqrt{3}=173.2,$$

$$XR=54°44',\quad YR=90°\quad ZR=144°44'.$$

40. a) (54). $X=4P$, $Y=4P$, $Z=4P$;

b) $X=0$, $Y=0$, $Z=4P$;

c) $X=4P-8x$, $Y=4P-8y$, $Z=4P$;

d) $X=4P-8x$, $Y=4P-8y$, $Z=4P-8z$.

41. a) $R=3h$, b) $R=4h$, c) $R=nh$.

42. a) (57). Lässt man mit dem Angriffspunkt der Kräfte ein rechtwinkliges Coordinatensystem zusammenfallen und bezeichnet die von den positiven Axen X, Y und Z mit P_1, P_2, P_3 gebildeten Winkel der Reihe nach mit $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$, so sind die Componenten der Resultante:

$$X=\Sigma P\cos\alpha,\quad Y=\Sigma P\cos\beta,\quad Z=\Sigma P\cos\gamma$$

und

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Setzt man in letzteren Ausdruck die Werthe von XYZ ein und benutzt hierauf zur Transformation die Beziehungen von der Ausdrucksform:

$$\cos P_1P_2=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

$$1=\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1,$$

so erhält man schliesslich:

$$R = \sqrt{\{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2P_1P_2\cos P_1P_2 + 2P_1P_3\cos P_1P_3 + 2P_2P_3\cos P_2P_3\}};$$

b) (56). $R = 153.7$;

c) $R = P\sqrt{3(1+2\cos\alpha)}$;

d) $R = P\sqrt{6} = 2.449\,P$;

e) $R = 2P$.

43. a) Der in Auflösung 42a angedeutete Weg führt zu dem Ausdrucke:

$$R = \sqrt{\{\Sigma P^2 + 2\Sigma PP'\cos(PP')\}};$$

b) Zerlegung jeder Kraft in eine Componente, welche in Richtung der Axe des Kräftebündels und in eine, welche senkrecht gegen jene Axe wirkt, führt zu einer in Richtung der Axe wirkenden Resultante von der Grösse:

$$R = \frac{nP}{\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{n}+\tfrac{1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}-\tfrac{1}{2}\alpha\right)};$$

c) nach der Methode wie bei b) findet man:

$$R = 5.792.$$

44. a) $\dfrac{P}{n\cos\alpha}$;

b) $\dfrac{1.064\,P}{n}$, $\dfrac{1.305\,P}{n}$, $\dfrac{2P}{n}$, $\dfrac{5.759\,P}{n}$;

c) $0.266\,P$.

Parallele, an Punkten einer festen Ebene angreifende und ganz in dieser Ebene enthaltene Kräfte.

45. Die Resultante und ihre Lage sind durch folgende Angaben bestimmt:

	Resultante.	Entfernung des Mittelpunktes von A. in cm.	von B. in cm.
1 (58).	30	$6\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$
2 (59).	50	60	40
3 (60).	22	14	30
4 (61).	14	$54\frac{6}{7}$	$57\frac{1}{7}$
5.	100	53	47
6	7	100	40
7.	13	70	60
8.	100	51	49
9.	$2P\alpha$	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$
10 (62).	$P+Q$	$\dfrac{Qe}{P+Q}$	$\dfrac{Pe}{P+Q}$

46. Die Resultante und ihre Lage gehen aus Folgendem hervor:

	Resultante.	Entfernung des Mittelpunktes von A. in cm	von B in cm
1 (63).	6	26	38
2 (64).	3	29	50
3 (65).	0.112	15.45	21.05
4 (66).	0.2	10.5	14.5
5.	1	200	210
6.	8	42	58
7.	7	40	54
8.	50	25	75
9.	10	0.7	1:7
10 (67).	$P-Q$	$\frac{Qe}{P-Q}$	$\frac{Pe}{P-Q}$.

47. Die Resultante und ihre Lage gehen aus der Tabelle hervor:

	Componente in A.	Componente in B.
1 (68).	9	6
2 (69).	7	74
3 (70).	7.5	93.5
4 (71).	8.225	3.775
5.	51	49
6.	1	15
7.	5	2
8.	$6\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
9.	$9\frac{3}{5}$	$1\frac{2}{5}$
10. (72).	$\frac{Rb}{a+b}$	$\frac{Ra}{a+b}$.

48. Abscissen der Resultante in den einzelnen Beispielen:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
15	$13\frac{1}{3}$	13	15	-6	9	-16	0	0	$\frac{Pa+Qb}{P+Q}$.

49. Componenten der Kraft in den einzelnen Beispielen:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2	4	1	4	8	14	6	5	3	$\frac{7}{4}$
2	1	5	4	2	1	6	4	3	$\frac{5}{4}$.

50. Die Abscissen der Angriffspunkte der Componenten sind:

1.	2.	3.	4.	5.
15	10	0	-9	-28
20	21	14	$+9$	0

6.	7.	8.	9.	10.
$r-\frac{nd}{1+n}$	$r-\frac{P+k}{2P+k}d$	$r-\frac{R+2k}{2R}d$	$\frac{r}{n+1}$	$r-\frac{Q}{P+Q}d$
$r+\frac{d}{1+n}$	$r+\frac{P}{2P+k}d$	$r+\frac{R-2k}{2R}d$	$\frac{n+2}{n+1}r$	$r+\frac{P}{P+Q}d.$

51. Der Angriffspunkt der Resultante ist von der ersten oder letzten Kraft resp. um 499.5, 500 oder $\frac{n-1}{2}$ Millimeter entfernt.

52. Abscissen des Angriffspunktes der Resultante:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
12	27	-6.6	-14	-4	1.4.

53. Der Angriffspunkt der Resultante hat, je nachdem die Kräfte gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, die Coordinaten:

$$a=\frac{Px+Qx'}{P\pm Q}, \qquad b=\frac{Py\pm Qy'}{P\pm Q}.$$

54. Die Coordinaten des Angriffspunktes der Resultante sind

a) bei gleicher Richtung aller Kräfte:

	1.	2.	3.	4.	5.
$X=$	5	0	-3	-5	15
$Y=$	10	5	2.4	0	20;

b) wenn P'' entgegengesetzt wie die übrigen wirkt:

$X=$	3.5	-1.5	-4.5	-6.5	13.5
$Y=$	14.5	9.5	7.5	4.5	24.5.

Parallele, im Allgemeinen nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte.

55. Angriffspunkte der Kräfte in Decimetern:

	1 (73).	2.	3.	4.
$X=$	$3\frac{5}{9}$	$4\frac{5}{18}$	$3\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{2}$
$Y=$	3	3	$2\frac{7}{9}$	$3\frac{2}{9}$.

56. Die gesuchte Coordinatenverminderung beträgt in Decimetern

	1.	2.	3.	4.
bei den x:	$2\frac{5}{9}$	$3\frac{5}{18}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{2}$
bei den y:	3	3	$2\frac{7}{9}$	$3\frac{2}{9}$.

57. Die Entfernung des Mittelpunktes der Drücke beträgt in ganzen mm

	1 (74).	2.	3.	4.
v. Ecke C:	258	242	234	277
v. Ecke D:	258	277	234	242.

58. Die Berechnung liefert folgende Componenten:

	1 (75)	2.	3.
Componente in $x_1 y_1$	$-342\frac{6}{7}$ ℔	$-21\frac{3}{7}$ ℔	300 ℔
„ „ $x_2 y_2$	$+371\frac{3}{7}$ „	$+85\frac{5}{7}$ „	-200 „
„ „ $x_3 y_3$	$+71\frac{3}{7}$ „	$+35\frac{5}{7}$ „	0 „

59. (76). Die Componenten betragen:

an $A = 50(2-\sqrt{2}) = 29.289$ ℔
an $B = 100(-1+\sqrt{2}) = 41.421$ „
an $C = 50(2-\sqrt{2}) = 29.289$ „

60. Der Angriffspunkt der Resultante ist bestimmt durch:
a) $X = 2.28$ dcm, $Y = 2.2$ dcm, $Z = 6.04$ dcm;
b) $X = 1\frac{5}{6}$ dcm, $Y = 1\frac{5}{6}$ dcm, $Z = 5\frac{1}{2}$ dcm.

Schwerpunkt.

A. Schwerpunkt von Linien.

61. Das Moment der Geraden in Bezug auf durch einen Endpunkt gezogene Senkrechte ist:

$$Lim\,\gamma\frac{l}{n}\left\{\frac{l}{n}+\frac{2l}{n}+\ldots+\frac{(n-2)l}{n}+\frac{(n-1)l}{n}\right\}=\gamma\frac{l^2}{2};$$

$$\text{Schwerpunktsentfernung: } \frac{\gamma\frac{l^2}{2}}{\gamma l}=\frac{1}{2}l.$$

62 (77). $x=\frac{b}{2}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}$, $\quad y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}$.

63 (78). Gleichsetzung der Seiten in voriger Auflösung und geometrische Betrachtung ergiebt, dass der Schwerpunkt auf der Höhe des Dreiecks und zwar am Ende des ersten Drittels derselben von der Basis aus gerechnet liegt.

64. Summirung der Momente der Sehnen bezüglich des halbirenden Durchmessers etc., ergeben, dass die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkt gleich ist r Mal beim:

4-Eck.	8-Eck (80).	12-Eck.	16-Eck.	20-Eck.	24-Eck.
0.5000	0.6035	0.6220	0.6284	0.6314	0.6330
28-Eck.	32-Eck.	36-Eck.	40-Eck.	$4n$-Eck.	Kreis (82).
0.6340	0.6346	0.6350	0.6353	$\frac{cotg\frac{\pi}{4n}}{2n}\frac{2}{\pi}=0.6366.$	

65. Auf dem in 64 angedeuteten Wege findet man $r\sqrt{2}$ Mal bei:

2 S.	4 S.	6 S.	8 S.	10 S.	12 S.
0.5938	0.6284	0.6330	0.6346	0.6353	0.6357
14 S.	16. S.	18 S.	20 S.	$2n$ S.	Kreis.
0.6358	0.6359	0.6362	0.6363	$\frac{cotg\frac{\pi}{8n}}{4n}$	0.6366.

66. Auf dem in Aufgabe 64 angedeuteten Wege findet man leicht, wenn man die Momente auf einen gegen den Halbirungsradius des Winkels α verticalen Durchmesser bezieht, die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte:

1. 2. 3. 4. 5. 6.

$$r\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\,cotg\cdot\frac{\alpha}{4n}}{2n},\ \frac{2r\sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha},\ \frac{360r\sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha\pi},\ 9.89\text{mm},\ 97.45\text{mm},\ 954.93\text{mm}.$$

67. Coordinaten des Schwerpunktes vom Liniencomplex:

	1 (85).	2.	3.	4.	5.
$X=$ cm	2.79	1.65	$+0.45$	5.17	6.17
$Y=$ cm	2.31	1.57	$+2.28$	5.33	-1.17.

B. Schwerpunkt von Flächen:

68.

	$X=$	$Y=$
	Centimeter.	
1 (87).	$4\frac{1}{3}$	3
2 (88).	14	13
3 (86).	$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$	$\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$.

69. Entfernung des Schwerpunktes vom halben Sechseck von der Basis a:

$$\frac{5}{18}a\sqrt{3}=0.48113a \quad (89).$$

4.81 cm (90).

4.06 cm (91).

70. Durch Summirung der Momente der das halbe $4n$-Eck zusammensetzenden Dreiecke bezogen auf den Halbirungsdurchmesser

etc. ergiebt sich für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt schliesslich $\frac{r}{3}\,\frac{cotg.\,\frac{\pi}{4n}}{n}$, und daher für die Hälfte eines Vielecks r Mal bei:

4 S.	8 S.	12 S.	16 S.	20 S.	24 S.	28 S.	32 S.	36 S.	40 S.
0.333	0.402	0.415	0.419	0.421	0.422	0.423	0.423	0.423	0.424.

Ferner steht der Schwerpunkt vom Mittelpunkt ab:
beim halben Achteck von 6 cm Seite um 2.41 cm,
„ „ „ „ 10 cm „ „ 4.02 cm,
„ Halbkreis vom Radius r um $Lim\,\frac{r}{3}\,\frac{cot\,\frac{\pi}{4n}}{n} = \frac{4r}{3\pi}$.

71. a) Summirung der in Beziehung auf einen gegen den Radius des Winkels α senkrechten Durchmesser genommenen Momente etc. ergiebt den Abstand des Schwerpunktes beim Complex von $2n$ Dreiecken vom Centrum:

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{r\,sin\,\frac{1}{2}\alpha}{n\,sin\,\frac{1}{4}\frac{\alpha}{n}} \times cos\,\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{n};$$

b) beim Kreisausschnitt wegen $n = \alpha$

$$Lim\,\tfrac{1}{3}\cdot\frac{r\,sin\,\frac{1}{2}\alpha}{n\,tg\,\frac{1}{4}\frac{\alpha}{n}} = \frac{4r\,sin\,\frac{1}{2}\alpha}{3\alpha};$$

c) beim Kreisausschnitt, $\alpha = 60^0$, $r = 10$ cm,

$$\frac{20}{\pi} = 6.37 \text{ cm } (^{97});$$

d) Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt beim Kreisabschnitt, Winkel α, Radius r:

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{r\,sin^3\,\frac{1}{2}\alpha}{\alpha - sin\,\alpha};$$

e) desgleichen beim Kreisabschnitt, Radius 1 cm, Centriwinkel 120^0: 0.705 cm.

72 ([101]). Theilung der Parabel in unendlich viele Streifen, parallel zur Axe, ergeben für die Fläche, sowie das in Bezug auf die X-Axe genommene Moment derselben:

$$F = 2\,Lim\frac{a}{n}\left\{\left[b-\frac{1}{2p}\left(\frac{a}{n}\right)^2\right]+\ldots\ldots\left[b-\frac{1}{2p}\left(\frac{\overline{n-1}\,a}{n}\right)^2\right]\right\}$$
$$= \tfrac{4}{3}\,ab,$$
$$FY = Lim\frac{a}{n}\left\{\left[b^2-\left\{\frac{1}{2p}\left(\frac{a}{n}\right)^2\right\}^2\right]+\ldots\ldots\left[b^2-\left\{\frac{1}{2p}\left(\frac{\overline{n-1}\,a}{n}\right)^2\right\}^2\right]\right\}$$
$$= \tfrac{4}{5}\,ab^2.$$

Daher $Y = \frac{3}{5}\,b$.

73 ([99]). Das in Aufl. 72 angedeutete Verfahren führt zu folgenden Ausdrücken für die gesuchten Abstände des Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Flächen:

$$\text{Halbellipse } Y = \frac{4b}{3\pi}, \qquad \text{Halbkreis } Y = \frac{4r}{3\pi}.$$

74. Durch ein ähnliches Verfahren, wie in Aufl. 72, ergiebt sich der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte bei der über der kleinen Axe stehenden Ellipsenhälfte:

bei der grossen Halbaxe a : $\frac{4a}{3\pi}$,

([109]) „ „ „ „ 6 cm : 2.55 cm.

75. Theilung des Mantels in unendlich viele Dreiecke mit gleicher Basis, auf dem Umfang der Grundfläche liegend und mit der Spitze des Kegels zusammenfallender Spitze, ergiebt den Abstand des Schwerpunktes des Kegelmantels von der Basis:

a) beim geraden Kegel $\frac{h}{3}$;

b) ([102]) beim geraden Kegel von 12 cm Höhe = 4 cm;

c) beim schiefen Kegel $\frac{h}{3}$.

76. Vor der Momentenberechnung Theilung der Oberflächen durch Parallelebenen zur Basis in unendlich viele Parallelstreifen, bei der Momentenberechnung Basis als Momentenebene.

Der Schwerpunkt der Fläche liegt bei allen drei Beispielen in der Mitte der Axe ([107], [106], [103]).

77. Wenn mit z der Abstand des Schwerpunktes von der horizontalen Basis bei der ausgeschnittenen Figur bezeichnet wird, so erhält man durch Vergleichung der auf die horizontale Basis bezogenen Momente schliesslich folgende Gleichung:

$$z^3 - \frac{h^3}{h-c}\,z + \frac{ch^3}{h-c} = 0.$$

Es gelingt, diese zur Form zu führen:

$$(z-h)\left(z+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h+3c}{h-3c}}\right)\left(z+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h+3c}{h-3c}}\right).$$

Von den drei Wurzeln dieser Gleichung ist allein mechanisch brauchbar und enthält die Auflösung der Aufgabe:

A. $$z=-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\sqrt{\frac{h+3c}{h-c}}.$$

B. Für's gleichschenklige Dreieck:

$$z=\frac{h}{2}\left[-1+\sqrt{3}\right]=0.3660\,h.$$

C. Für die Parabel:

$$z=\frac{b}{2}\left[-1+\sqrt{\frac{11}{3}}\right]=0.4574\,b.$$

D. Für die Ellipse:

$$z=0.4937\,a.$$

E. Für den Halbkreis:

$$z=0.4937\,R \quad (^{108}).$$

C. Schwerpunkt von Körpern.

78. Die Halbkugel denkt man sich in unendlich viele Pyramiden zerlegt, deren Basen die Oberfläche der Halbkugel zusammensetzen und deren Spitzen mit dem Mittelpunkt zusammenfallen. Es leuchtet nun ein, dass man sich die wirkliche Masse der Halbkugel in einer Halbkugeloberfläche vom Radius $\frac{3}{4}r$ vertheilt denken kann, deren Schwerpunkt den Abstand $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r=\frac{3}{8}r$ vom Mittelpunkt hat.

Sonach ist das Verhältniss der Abstände der Schwerpunkte von der Basis bei Cylinder, Kegel und Halbkugel von gleicher Grundfläche und Höhe:

$$4:2:3.$$

79. Die Momentenberechnung bezüglich einer passend gewählten Ebene ergiebt:

für die abgestumpfte Pyramide $Z=\frac{1}{4}h\,\frac{F+2\sqrt{Ff}+3f}{F+\sqrt{Ff}+f}$;

„ den Obelisken von Luxor $Z=29.83$ Fuss;

„ abgestutzten Kegel $Z=\frac{1}{4}h\,\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}$.

80. Die bekannte Lage des Schwerpunktes von Pyramiden auf der Verbindungsgeraden von Schwerpunkt von Grundfläche und Spitze, führt durch leichte Rechnung zu den gesuchten Abständen:

bei der Pyramide . $\frac{a}{8}\sqrt{2} = 0.17678\,a$;

bei dem Kegel ([109]) $\frac{r}{\pi} = 0.31831\,r$.

81. a) $\frac{11}{16}h$; b) 6.875 cm ([114]).

82. 1) Entfernung des Schwerpunktes von der Stossfläche nach der Seite des stärkern Cylinders zu:

$$\tfrac{1}{2}\frac{R^2h^2 - r^2H^2}{R^2h + r^3H};$$

2) Bedingung für die Lage des Schwerpunktes in der Stossfläche:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{h};$$

3) der Schwerpunkt liegt auf der Axe des stärkern Cylinders 3.6 cm von der Stossfläche entfernt.

83. Der Schwerpunkt steht ab vom äussern Querschnitt des längern Schenkels:

1 ([113]). 3.833 cm; 2. $\frac{1}{2}\frac{L^2 + (l-a)(2L-a)}{L+l-a}$;

von der äussern Grundfläche des längern Schenkels:

1. 1.167 cm; 2. $\frac{1}{2}\frac{La + (l+a)(l-a)}{L+l-a}$.

84 ([117]). Der Schwerpunkt liegt 0.51 cm unter dem Quecksilberniveau.

85. Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche bei einem Ausdrehungsdurchmesser von:

10 cm	8 cm	6 cm	4 cm	2 cm
3.20 cm	3.29 cm	3.47 cm	3.81 cm	4.46 cm.

6) ([116]). Schwerpunktsabstand von der Basis:

47.79 cm.

86. Die Höhe des Bleiausgusses hat zu betragen:

	1.	2.	3.	4.	5.
cm	1.986	2.335	2.817	3.501	4.407

6.	7 ([119]).
33.900 cm	2.825 cm.

Wegen der Ausrechnung s. m. die folgenden Auflösungen.

87 ([118]). Aus den Momenten berechnet man zunächst den Abstand des Schwerpunktes von der Basis des schwereren Cylinders, wenn dessen Höhe x ist:

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{h^2\gamma_1 + x^2(\gamma - \gamma_1)}{h\gamma_1 + x(\gamma - \gamma_1)},$$

oder, wenn der Kürze wegen $\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_1} = s$ gesetzt wird:

$$z = \tfrac{1}{2}\frac{h^2 + x^2 s}{h + xs} \quad (o).$$

Lässt man x um $\triangle x$ zunehmen, so nimmt z um $\triangle z$ zu. Indem man bei der Ausrechnung $\triangle x$ als sehr kleine Grösse behandelt, findet man:

$$\triangle z = \tfrac{1}{2}\frac{x^2 s^2 + 2hxs - h^2 s}{(h + xs)^2}\triangle x \quad (p).$$

Die Gleichung p zeigt, dass $\triangle z$ durch eine Zunahme oder Abnahme von x um $\triangle x$ nicht mehr geändert wird, wenn x einen Werth hat, der den Zähler von (p) zu Null macht, also aus der Gleichung zu berechnen ist:

$$x^2 s^2 + 2hxs - h^2 s = 0 \quad (q).$$

Der einzige mechanisch brauchbare Werth, den (q) liefert, ist:

$$x_m = \frac{h}{s}\left[\sqrt{1+s} - 1\right] \quad (r).$$

Ob dieser Werth die Gleichung (o) zum Maximum oder Minimum macht, erkennt man, indem man in (o) den Werth $x = x_m + \triangle$ einsetzt, wo $\triangle$ eine kleine Grösse ist. Bei der Ausrechnung erhält man für z, wenn man die zweite Potenz von $\triangle$ nicht vernachlässigt:

$$z = x_m + \tfrac{1}{2}\frac{s}{h\sqrt{1+s} + s\triangle}\cdot\triangle^2 \quad (s).$$

Die Gleichung (s) zeigt, dass der Werth x_m (s. r) wirklich die tiefste Schwerpunktslage herbeiführt, da eine Zu- oder Abnahme von x_m (durch ein positives oder negatives $\triangle$) immer eine Vergrösserung des z im Gefolge hat. Ferner ergiebt sich für $\triangle = 0$

$$z = x_m,$$

d. h. bei der tiefsten Schwerpunktslage liegt der Schwerpunkt in der oberen Fläche des schwereren Cylinders.

In den gegebenen Grössen der Aufgabe ausgedrückt ist die

Höhe des schwereren Cylinders: $h\frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma\gamma_1}}{\gamma - \gamma_1}$,

„ „ leichteren Cylinders: $h\frac{\gamma - \sqrt{\gamma\gamma_1}}{\gamma - \gamma_1}$

88. Durch ähnliche Rechnung wie bei voriger Aufgabe findet

man für die Entfernung des Schwerpunktes von der Basis, wenn die Höhe der Aushöhlung x ist:

$$y = \frac{ka + \frac{1}{2}x^2}{k + x};$$

y wird Minimum, wenn:

$$x = x_m = -k + \sqrt{k^2 + 2ka},$$

und wenn $x = x_m$ wird auch

$$y = x_m,$$

d. h. der Schwerpunkt liegt, wenn er tiefste Lage hat, auch hier in der oberen Fläche der Aushöhlung.

89. Durch ähnliche Rechnungsweise, wie in Aufgabe 87, findet man für die der tiefsten Schwerpunktslage entsprechende Tiefe der Aushöhlung:

$$x_m = k - \sqrt{k^2 - 2kb},$$

und dass bei diesem Werthe von x der Schwerpunkt in die Basis der Aushöhlung zu liegen kommt.

Kräftepaare.

90 ([121]). Das Moment des resultirenden Paares = 31.

91 ([122]). Das Moment des resultirenden Paares = 75; Drehung v. l. n. r.

92 ([123]). Das Moment des resultirenden Paares = 20; v. l. n. r.

93 ([124]). Das Moment des resultirenden Paares = 73; Drehung v. l. n. r.

94. Die Axen der resultirenden Paare sind:

1.	2.	3.	4.	5.
17	29	37	53	65.

95. Es correspondiren folgende Winkel zwischen Paar und Paarescomponente mit den componirenden Axen:

15°	30°	45°	60°	75°
64.71	72.17	88.39	125	241.5.

Kräfte, welche in verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen und deren Richtungen nicht parallel sind.

96 ([131]). Die Resultante beider Kräfte ist P; ihr Angriffspunkt ist der Mittelpunkt der Geraden; ihre Richtung bildet mit der Geraden Winkel von 90°.

97 ([132]). Die resultirende Kraft = 50kg schliesst mit der Geraden einen Winkel von 53°8′ ein, das Moment des Paares ist 200.

98 ([186]). Die resultirende Kraft $= 100\sqrt{2} = 141.42k$,
das „ Paar $= 1000\sqrt{2} = 1414.2$.

99 ([138]). Die resultirende Kraft $= P\sqrt{2} = 1.4142P$ bildet mit den Coordinatenaxen resp. die Winkel $90^0, 45^0, 45^0$; das resultirende Paar $\frac{Pa}{2}\sqrt{2} = 0.70711\,Pa$ schliesst mit den Axen resp. die Winkel 90^0, 45^0, 45^0 ein.

100 ([139]). Die resultirende Kraft ist $P\sqrt{3} = 1.7321P$ und schliesst mit jeder Coordinatenaxe einen Winkel von $54^0 44.1'$ ein; das Moment des resultirenden Paares ist Pa; seine Axe ist der positiven y-Axe parallel.

Gleichgewicht von Körpern auf horizontalem und geneigtem Boden, sowie von aufgehangenen Körpern, Stabilität.

101. Den ungünstigsten Fall angenommen, wo die Ausladung nach dem kürzesten Durchmesser der Grundfläche gerichtet ist, darf die Ausladung höchstens betragen:

1. beim schiefen Kreiscylinder $2r$;
2. beim schiefen elliptischen Cylinder $2b$;
3. beim schiefen Kreiskegel $4r$;
4. beim schiefen elliptischen Kegel $4b$;
5. beim schiefen Prisma mit regelmässiger n-eckiger Basis

$$\cdot\, s\,cotg\frac{\pi}{n};$$

6. bei der schiefen Pyramide mit regelmässiger n-eckiger Basis $2\,s\,cotg\frac{\pi}{n}$.

102. Der Schwerpunkt des Armgestells ladet aus:

	1.	2.	3.	4.	5.
cm:	1	2	2.5	2	1.75.

103. Die Neigung der schiefen Ebene darf nicht überschreiten:

a) beim Würfel 45 Grad;

b) beim Prisma mit rechteckigem Querschnitt $Arctg\frac{b}{h}$;

c) beim Prisma, Querschnitt, regul. n-Eck $Arctg\frac{s}{h}cotg\frac{\pi}{n}$;

d) beim Cylinder $Arctg\frac{2r}{h}$;

e) beim elliptischen Cylinder $Arctg\frac{2b}{h}$;

f) beim Kreiskegel $Arctg\frac{4r}{h}$;

g) beim elliptischen Kegel $Arctg\frac{4b}{h}$.

104. Die Tieferstellung des einen Rades gegen das andere darf höchstens 94 cm betragen

105. Der Abstand des Schwerpunktes von der geometrischen Axe muss überschreiten bei folgenden Neigungswinkeln der schiefen Ebene:

	1 Gr.	2 Gr.	3 Gr.	4 Gr.	5. Gr.
cm:	0.17	0.35	0.52	0.70	0.87
	6 Gr.	7 Gr.	8 Gr.	9 Gr.	10 Gr.
cm:	1.05	1.22	1.39	1.56	1.74

106. Folgenden Abständen des Schwerpunktes von der Axe entsprechen die beigesetzten Neigungswinkel der schiefen Ebene:

Abstand des Schwerpunktes cm:	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Winkel:	2°52′	5°44′	8°38′	11°32′	14°29′
Abstand des Schwerpunktes cm:	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Winkel:	17°27′	20°29′	23°35′	26°45′	30°.

107. Eine Berechnung der Lage des Schwerpunktes im ausgehöhlten Cylinder führt zum Resultat, dass einander entsprechen:

Radius der Aushöhlung:	$0.1r$	$0.2r$	$0.3r$	$0.4r$	$0.5r$
Verhältniss:	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{130}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{6}$
Radius der Aushöhlung:	$0.6r$	$0.7r$	$0.8r$	$0.9r$	
Verhältniss:	$\frac{9}{40}$	$\frac{49}{170}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{81}{190}$.	

Wenn die Aushöhlung der geometrischen Axe des Cylinders angrenzt, so ist bei dem Radius $\frac{r}{2}$ der erstern das gesuchte Verhältniss $\frac{1}{6}$.

108. Man gebe dem Doppelkegel eine solche Lage, dass sein Schwerpunkt in der durch die Spitze A des Winkels der beiden Lineale gehende Verticale liegt, der Schwerpunkt S liegt dann in der Höhe r über einer durch A gelegten Horizontalebene.

Wenn man hierauf den Doppelkegel an die Stelle bringt, wo seine Axe den Zwischenraum zwischen beiden Linealen gerade ausfüllt, liegt der Punkt S um $\frac{h \sin \Phi}{tg\, \varphi}$ höher als der Punkt A; er ist also bei der Bewegung aus der ersten Lage nach der zweiten um $r - \frac{h \sin \Phi}{tg\, \varphi}$ gefallen. Der Punkt S beschreibt zwischen den beiden Grenzlagen des Doppelkegels eine Gerade, und die Bedingung des Steigens ist:

$$tg\, \varphi > \frac{h \sin \Phi}{r}.$$

109 ([149]). a) Da der Schwerpunkt der Parabel um $\frac{3}{10} p$ von deren Scheitel absteht, so ist der gesuchte Winkel:

$$78^0\ 41';$$

b) beim Vollkreis: 45^0;

c) bei der Vollellipse: 45^0;

d) da der Schwerpunkt des Halbkreises um $0.42441\, r$ vom Centrum absteht, so beträgt hier der Winkel:

$$34^0\,54',\ 8^0\,42 \text{ und } 11^0\,20'.$$

110. Die Stabilität von Cylinder, Kegel, Paraboloid und Ellipsoid von gleicher Grundfläche und Höhe verhält sich wie

$$1 : \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{8}{9}.$$

Die Stabilität der vier Körper steht bei gleicher Grundfläche und gleichem Inhalt in dem Verhältniss:

$$1 : \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{9}.$$

Die Stabilität der vier Körper steht bei gleicher Höhe und gleichem Inhalt in dem Verhältniss:

$$1 : 2\sqrt{3} : \tfrac{3}{2}\sqrt{2} : \tfrac{3}{8}\sqrt{6}.$$

111. Die Stabilität des Holzcylinders beträgt in kg:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
0.7	10.5	7.1	4.0	2.2	1.0
7.	8.	9.	10.	11.	
6.9	4.8	3.1	1.6	0.9.	

112. Die Stabilität des Cylinders ist:

$$S = 2 r^3 \pi \frac{[x(\gamma - \gamma^1) + h\gamma_1]^2}{x^2(\gamma - \gamma^1) + h^2 \gamma_1}.$$

113. Die Stabilität des Wagens beträgt je nach den angenommenen Belastungen:

kg: 75, 136, 130, 125.

114. Die Standfestigkeit des Obelisken ist:

31250 kg.

115. Es correspondiren folgende Ausladungen a und Stabilitätsverhältnisse:

	b	$2b$	$3b$	$4b$	$5b$
Stabilitätsverhältniss $\frac{S}{S_0}$:	4.1	9.2	16.3	25.3	36.3.

Der allgemeine Ausdruck ist:

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{a}{b} + 1\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{a}{b}}{3 + \frac{a}{b}}.$$

Gleichgewicht einfacher Maschinen ohne Berücksichtigung der Reibung.

A. Gruppe des Hebels.

116. Die am Hebel anzubringende Kraft ist:

	1 (156).	2 (157).	3 (158).	4 (159).	5.
Pfund:	25	100	20	7	80.

117. Der Stützpunkt muss in folgenden Entfernungen von der kleineren Kraft liegen:

	1 (161).	2.	3.	4.	5.
cm:	20	15	15	18	14.

118. Die Grösse der Kraft muss betragen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	100	54	70	70	15.

119. Die Grösse der Kraft muss betragen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	1	4	4	6	2.

120. Da der Hebelsarm der Kraft in allen Fällen doppelt so gross als der Hebelsarm der Last ist, so ist die Kraft wenigstens

180 Centner

zu nehmen.

121. Es muss widergehalten werden bei:

Grad:	75	60	45	30	15
mit kg:	259	500	707	866	966.

122. Beim Experimentirhebel ist:

a) die Gleichgewichtsbedingung:

$$(P_1+p)l_1+(P_2+p)\,l_2=(Q_1+p)r_1+(Q_2+p)r_2+G\left(\frac{L}{2}-a\right);$$

b) (162). $P_1=1$ Ø;

c) (163). $P_2=5$ Ø;

d) (164). $r_1=6\frac{2}{7}$ dcm $=6.286$ dcm.

123. Die das Gleichgewicht hervorbringende Kraft ist bei einem Winkel der Verlängerungen der Seilenden von:

	15°	30° (168.)	45°	60°	75°
Pfund:	50.43	51.77	54.12	57.74	63.03.

124. Die Kraft ist allgemein:

$$P=Q\frac{m}{n},$$

in dem speciellen Beispiele (174):

$$Q=25\text{ Ø}.$$

125. Die Kraft zur Herstellung des Gleichgewichts beträgt:

	1 (173).	2.	3.	4.	5.
Pfund:	$\frac{1}{5}Q$	45	39	36	60.

B. Gruppe der schiefen Ebene.

126. Die Gleichgewicht herbeiführende Kraft beträgt:

	1 (175).	2 (176).	3 (177).	4 (178).	5 (179).
Pfund:	1.736	1.710	130	6.428	3.830.
	6 (180).	7 (181).	8 (182).		
Pfund:	4.330	9.397	4.924.		

127. Die horizontale, das Herabgleiten verhindernde Kraft beträgt:

	1 (183).	2 (184).	3 (185).	4 (185).	5 (186).
Pfund:	1.763	3.640	5.774	8.391	11.918.
	6 (188).	7 (189).	8 (190).		
Pfund:	17.321	27.475	56.713.		

128. Die Kraft ist im Allgemeinen $Q\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ und in dem Beispiel 2,267 Pfund.

129. Folgende Kräfte stellen das Gleichgewicht her:

	1 (192).	2.	3.	4.	5.
Pfund:	17.431	34.730	51.764	68.404	84.524.

130. Folgende Kräfte stellen das Gleichgewicht her:

1 (193).	2.	3.	4.	5.
$\frac{Q}{8}$	$\frac{Q}{16}$	$\frac{Q}{32}$	$\frac{Q}{64}$	$\frac{Q}{128}$.

131. Die Kraft zur Herstellung des Gleichgewichts, welche am Umfange der Spindel wirkt, beträgt:

	1 (194).	2.	3.	4.	5.
Pfund:	7.958	3.979	1.990	0.995	0.497.

Gleichschenklige Wage.

132. A. Nach dem Zulegen des kleinen Gewichtes p auf die eine Wagschale muss folgende Gleichgewichtsbedingung stattfinden, wenn man mit φ den sehr kleinen, dadurch hervorgebrachten Ausschlagswinkel bezeichnet:

$$Gs\sin\varphi = pl\cos\varphi,$$

woraus sich ergiebt:

$$tg\,\varphi = \frac{pl}{Gs}.$$

Indem man Tangente und Bogen ohne erheblichen Fehler vertauschen kann, findet man, dass der Ausschlag in Scalentheilen beträgt:

$$n = \frac{z}{\sigma} \cdot \frac{pl}{Gs}.$$

B. Bei 10 mg einseitigem Zulagsgewicht treten folgende Ausschläge ein:

	1.	2.	3.	4.	5.
mm:	0.0.5	2.5	3.1	10.9.	

Beispiel 5 gestattet wegen der Lage des Schwerpunktes über der Mittelschneide keine Berechnung.

133. A. Legt man auf die rechte Wagschale das Zulagsgewicht p bei belasteter Wage, so wirkt nach dem Eintreten des Gleichgewichts auf der linken Seite das Moment:

$$P[l + a\,tg\,\varphi]\cos\varphi + G.s.\sin\varphi,$$

und auf der rechten Seite:

$$(P+p)[l - a\,tg\,\varphi]\cos\varphi.$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke und die Weglassung der kleinen Grösse zweiter Ordnung $-ap\sin\varphi$ führt zu dem Werthe:

$$tg\,\varphi = \frac{pl}{Gs + 2Pa}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$n = \frac{z}{\sigma} \cdot \frac{pl}{Gs + 2Pa}.$$

B. Für den unbelasteten Balken erhält man für n dieselben Werthe, die in 32 A angegeben sind.

Für den belasteten Balken dagegen ergeben sich folgende Ausschläge:

	1.	2.	3.	4.	5.
Scalentheile:	0.02	0.2	0.8	6.0	15.2.

134. A. $$s = \frac{z}{\sigma}\,\frac{pl}{Gn};$$

B. $$\triangle s = -\,s\,.\,\frac{\triangle n}{n}.$$

C. Man erhält durch Einsetzung der Specialwerthe in die eben angegebenen Ausdrücke:

$$s = 0.1936 \text{ mm}$$
$$\triangle s = \pm\, 0.0036.$$

135. Ist:

l die Länge des linken Wagarmes;

r die Länge des rechten Wagarmes;

L das beobachtete Körpergewicht, wenn der Körper beim Wägen in der linken Schale liegt;

R das beobachtete Körpergewicht, wenn der Körper beim Wägen in der rechten Schale liegt.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Grössen sind:

$$lX = rL$$
$$lR = rX,$$

wo X das wahre Gewicht des Körpers bedeutet. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich:

1. $$X = \sqrt{RL};$$

2. $$\frac{l}{r} = \sqrt{\frac{L}{R}}.$$

Behufs der Berechnung braucht man nur:

$$A = \frac{L+R}{2}, \qquad D = \frac{L-R}{2}$$

zu setzen, so kommt man leicht durch Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen höherer Ordnung zu dem Endresultat:

I. $$X = A;$$

II. $$X = 1 + \frac{D}{A}.$$

Bei den angeführten Zahlenbeispielen ist nun das wahre Gewicht des Körpers:

	1 (202).	2 (203).	3 (204).	4.	5.
mg:	10056	12226	10012	10002	10001.

Der linke Arm verhält sich zum rechten wie 10000 :

1.	2.	3 (204).	4.	5.
9972	10021	9988	10002	10001.

136. Die Ermittelung der Unbekannten aus den auf der Wage abgeleiteten Gleichungen führt zu folgenden Correctionen (50 g = 50000 mg) in Milligrammen:

	1.	2.	3.	4.	5.
10′	− 1.4	− 0.8	+ 0.4	− 0.02	+ 0.10
20″	− 1.8	− 0.6	− 0.2	− 0.14	− 0.40
20′	+ 0.2	+ 0.4	+ 0.8	− 0.34	− 0.40,

und wenn man 10′ = 10000 mg annimmt:

50′	7	4	− 2	+ 0.1	− 0.5
20′	3	2		− 0.3	− 0.6
20″	1	1	− 1	− 0.1	− 0.6.

137. Setzt man pro 1 g Nominalwerth jedem Gewichtsstück noch ein Gewicht x zu, so bleiben die Gewichtswerthe proportional; x ist dann aus den Bedingungen der Aufgaben zu bestimmen, worauf man folgende Correctionen erhält (mg):

	a)	b)	c)
50 g	11.5	− 0.5	+ 0.76
20′ g	4.8	− 0.0	+ 0.50
20″ g	2.8	− 2.0	− 1.50
10 g	0.9	− 1.5	− 1.25
5 g	0.2	− 1.0	− 0.87
2′ g	0.4	− 0.08	− 0.03
2″ g	0.0	− 0.48	− 0.43
1′ g	0.1	− 0.14	− 0.11
1″ g	0.1	− 0.14	− 0.11.

Schiefe Ebene, Keil, Schraube mit Berücksichtigung der Reibung.

138. A. Der Grenzwinkel, für welchen Ruhe in Bewegung übergeht, beträgt:

	1.	2.	3.	4.	5.
Grad:	35	31	27	10	6.

B. Die in Richtung der schiefen Ebene zum Aufhalten anzubringende kleinste Kraft beträgt

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	21	28	35	58	64.

C. Die Kraft, welche die Bewegung in Richtung der schiefen Ebene einleitet, ist:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	120	113	106	83	78.

D Die Kraft in Richtung der Basis der schiefen Ebene, welche die Bewegung auf der schiefen Ebene aufhält, ist:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	18	25	33	69	82.

E. Die Kraft in Richtung der Basis der schiefen Ebene, welche die Bewegung auf der schiefen Ebene nach Oben vorbereitet, ist:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	567	400	300	144	122.

F. Der Druck, welcher das Herabgleiten des Körpers an der Wand verhütet, ist:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pfund:	143	167	200	556	1000.

139 ([213]). a) Der Druck Q, welcher auf jede Keilseite ausgeübt wird, sowie die von ihm veranlassten Reibungswiderstände, führen zu einer Bedingungsgleichung, aus welcher sich ergiebt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,x < f;$$

b) ist der Reibungscoëfficient zwischen Keilsubstanz und Holz 0.6, so ist $x = 61^0\,55.6'$;

c) aus letzterem Winkel berechnet man, dass zwischen Keilrücken und Keilseiten das Verhältniss:

$$1.029 : 1$$

bestehen muss.

140 ([215]). Die Analogie der Schraube mit der schiefen Ebene führt auf den Ausdruck für die am Umfange anzubringende Kraft:

$$P = Q\frac{h - 2r\pi f}{fh + 2r\pi}.$$

141 ([216]). Die Analogie des Falles mit dem, wo eine auf eine schiefe Ebene gelegte Last durch ihr eigenes Gewicht herabgleitet, führt leicht zu der Bedingung:

$$\frac{h}{r} = 2f\pi.$$

Für Holz wird $\frac{h}{r} = 3.1416$,

„ Metall „ „ $= 1.1310$.

Elasticität und Festigkeit.

142. Die Verlängerung des Drahtes um 1 mm wird durch ein Gewicht (kg) hervorgebracht von:

angelassener Kupferdraht	angelassener Platindraht	angelassener Eisendraht	angelassener Stahldraht	angelassener Gussstahldraht
8.262	12.19	16.33	13.57	15.36.

143. Die Durchmesser des Drahtes müssen bei zehnfacher Sicherheit betragen:

angelassener Kupferdraht	angelassener Eisendraht	angelassener Gussstahldraht	angelassener Stahldraht
5.72 mm	4.62 mm	3.90 mm	5.00 mm.

Die Dehnung beträgt bei 100 kg:

0.92 mm 0.72 mm 1.07 mm 0.74 mm.

144. Ein Gewicht von 10 kg bringt hervor (δ kann in der Rechnung als sehr kleine Grösse behandelt werden) bei:

	angelassener Kupferdraht	angelassener Eisendraht	angelassener Gussstahldraht	angelassener Stahldraht
Dehnung mm:	0.95	0.48	0.51	0.58
Volumenvermehrung cbmm:	0.32	0.16	0.17	0.19.

145. Die Höhe der Mittelaxe über der Ebene der Endaxen beträgt

bei angehangenen leeren Schalen: 0.06150 mm,

„ grösster Belastung: 0.09246 mm.

146. Ist die zu bestimmende Breite des Balkens x, so ist die Tragfähigkeit des Balkens:

$$P = R\frac{x(d^2-x^2)}{l}.$$

Durch eine verschwindend kleine Zunahme $\triangle x$ von x wird (wenn man nur noch die zweite Potenz von $\triangle x$ bei der Ausrechnung beibehält) bei P die Zunahme hervorgebracht:

$$\triangle P = R\left\{\frac{(d^2-3x^2)}{l}\ \triangle x - \frac{3x(\triangle x)^2}{l}\right\}.$$

Unter allen Werthen, die x bei dem gezimmerten Balken annehmen kann, ist der Werth $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ für unsere Aufgabe von be-

sonderer Wichtigkeit, bei welchem das erste Glied des eingeklammerten Ausdruckes verschwindet, und daher die Zunahme der Tragfähigkeit durch den Ausdruck:

$$\triangle P = -\frac{3xR}{l}(\triangle x)^2$$

bestimmt wird. Letzterer zeigt nun, dass jedes $\triangle x$, gleichviel ob es positiv oder negativ ist, eine Verminderung von P hervorbringt, d. i., dass P durch den Werth $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ zum Maximum gemacht wird.

Gleichförmige Bewegung.

147. Die durchschnittliche Geschwindigkeit des Wagens betrug 4 m pro Secunde.

148. Die durchschnittliche Geschwindigkeit der Maschine betrug 24 m pro Secunde.

149. Die zu bestimmenden Grössen sind:

1. $$c_1 = \frac{d - c(T-t)}{T - t_1},$$

2. $$c = \frac{e}{T-t},$$

$$c_1 = \frac{d-e}{T-t_1}.$$

150. Die Winkelgeschwindigkeit hat folgenden Werth:

1 (237).	2 (238).	3.	4.	5.
125.66	65.973	6.283	0.628	$\frac{2n\pi}{t}$.

151. Die Umdrehungszahl des Körpers pro Minute beträgt:

1.	2.	3.	4.	5.
9.55	47.75	95.49	143.24	$9.55\,\xi$.

152. Zwischen je zwei Coincidenzen der Punkte vergeht die Zeit $\frac{2\pi}{\xi_1 - \xi}$ oder $\frac{t}{n-m}$.

Die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten ist gleich $\frac{2\pi}{T}$.

153. Zwischen je zwei Coincidenzen der Punkte vergeht die Zeit $\frac{2\pi}{\xi_1 + \xi}$ oder $\frac{t}{n+m}$.

Die Summe der Winkelgeschwindigkeiten ist gleich $\frac{2\pi}{T'}$.

154. Da
$$\xi_1 - \xi = \frac{2\pi}{T},$$
$$\xi_1 + \xi = \frac{2\pi}{T'},$$
so ist:
$$\xi_1 = \pi\left[\frac{1}{T'} + \frac{1}{T}\right],$$
$$\xi = \pi\left[\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right].$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

155. Der frei durchfallene Raum und die dabei erlangte Endgeschwindigkeit beträgt in Metern nach:

	1″	2″	3″	4″	5″
Fallraum:	4.9	19.6	44.1	78.5	122.6
Endgeschwindigkeit:	9.8	19.6	29.4	39.2	49.1
	6″	7″	8″	9″	10″
Fallraum:	176.6	240.3	313.9	397.3	490.5
Endgeschwindigkeit:	58.9	68.7	78.5	88.3	98.1.

156. Folgende Fallräume, Fallzeiten und Endgeschwindigkeiten correspondiren:

Fallraum:	100 m	200 m	300 m	400 m	500 m	600 m
Fallzeit:	4.5″	6.4″	7.8″	9.0″	10.1″	11.1″
Endgeschw.:	44.3 m	62.6 m	76.7 m	88.6 m	99.0 m	108.5 m.

157. Es correspondiren folgende Endgeschwindigkeiten und Fallräume:

Endgeschwindigkeit m:	100	200	300	400	500
Fallraum:	510	2039	4587	8155	12742.

158. Den angegebenen Fallzeiten entsprechen:
$g =$ 9.8 m auf der Erde,
$g =$ 1.7 m auf dem Monde,
$g =$ 26.4 m auf dem Jupiter.

Wurfbewegung im luftleeren Raume.

159. Der Körper befindet sich im Aufsteigen nach der Zeit:
$$t = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2gy}}{g}$$

in der Entfernung y vom Ausgangsorte und hat daselbst die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gy}.$$

Der Abstand y wird im Niedersteigen nach der Zeit:

$$t = \frac{c + \sqrt{c^2 - 2gy}}{g}$$

und mit der Geschwindigkeit:

$$v = -\sqrt{c^2 - 2gy}$$

erreicht.

2. Der Körper hat die Geschwindigkeit v nach der Zeit:

$$t = \frac{c - v}{g}$$

und im Abstande:

$$y = \frac{c^2 - v^2}{2g}$$

erreicht.

160. Die Körper treffen sich nach der Zeit:

$$t = \frac{c}{g} + \tfrac{1}{2}t_1,$$

vom Bewegungsanfang des ersten Körpers gerechnet.

161. Es correspondiren folgende Flugzeiten in Secunden, Abstände vom Ausgangsort in Metern und Endgeschwindigkeiten in Metern:

Flugzeit Sec.:	6.8	13.6	20.4	27.2	34.0
Abstand m:	2039	3625	4757	5437	5663
Geschw. m:	267	200	133	67	0
Flugzeit Sec.:	40.8	47.6	54.4	61.2	68.0
Abstand m:	5437	4757	3625	2039	0
Geschw. m:	−67	−133	−200	−267	−333.

162. Beide Körper treffen sich im Abstand $\frac{7}{16} \cdot \frac{c^2}{2g}$ vom Ausgangsort des aufwärts geworfenen Körpers; der aufwärts geworfene hat die Geschwindigkeit $\frac{3}{4}c$, der abwärts geworfene die Geschwindigkeit $-\frac{5}{4}c$.

163. Beide Körper treffen sich nach der Zeit:

$$t = \frac{ct_1 - \frac{1}{2}gt_1^2}{c - gt_1}$$

und im Abstand $\frac{1}{2}gt^2$. Der freifallende hat die Geschwindigkeit:

$$v = gt_1 + \tfrac{1}{2}\frac{g^2 t_1^2}{c - gt_1},$$

der geworfene die Geschwindigkeit:

$$v = c + \tfrac{1}{2}\frac{g^2 t_1^2}{c - gt_1}.$$

164. Es gehören folgende Elevationswinkel, horizontale Wurfweiten, Scheitelhöhen und Flugzeiten zusammen:

Elevationswinkel:	15°	30°	45°
Wurfweiten m:	5663	9809	11326
Scheitelhöhen m:	379	1416	2832
Flugzeiten Sec.:	17.6	34.0	48.1
Elevationswinkel:	60°	75°	90°
Wurfweiten m:	9809	5663	0
Scheitelhöhen m:	4247	5284	5663
Flugzeiten Sec.:	58.9	65.6	68.0.

165. Der Abscisse $x = \nu \,.\, w$
entspricht die Ordinate $y = 4\nu(1-\nu)\,.\,h$, demnach gehören folgende Ordinaten und Abscissen zusammen:

$x =$	$0.1w$	$0.2w$	$0.3w$	$0.4w$	$0.5w$
$y =$	$0.36h$	$0.64h$	$0.84h$	$0.96h$	$1.0h$
$x =$	$0.6w$	$0.7w$	$0.8w$	$0.9w$	$1.0w$
$y =$	$0.96h$	$0.84h$	$0.64h$	$0.36h$	0.0.

166. Aus den Gleichungen der Wurfbewegung:

$$\alpha = ct\cos\varepsilon,$$
$$\beta = ct\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}gt^2$$

findet man durch Elimination von t und nach einigen Reductionen:

1. $$tg\,\varepsilon = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 - 2c^2 g\beta - g^2\alpha^2}}{g\alpha}.$$

Die Lösung ist möglich, wenn die Wurzelgrösse nicht imaginär wird; dies führt zur Bedingung:

2. $$\frac{c^2}{g} > \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Es giebt nur einen Werth für $tg\,\varepsilon$, wenn die Wurzelgrösse 0 wird, d. i.:

3. $$\left(\frac{c^2}{g} - \beta\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

wird.

Die Aufgabe ist unmöglich, wenn

4. $$\frac{c^2}{g} < \beta + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

167. Die gesuchte Geschwindigkeit ist:

$$c = \frac{\alpha}{\cos\varepsilon}\sqrt{\frac{g}{2(\alpha\, tang\, \varepsilon - \beta)}}.$$

Die Lösung ist unmöglich, sobald

$$tg\,\varepsilon < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Masse, Dichtigkeit, bewegende Kraft, Beschleunigung.

168. Es entsprechen sich folgende absolute Gewichte und Massen:

absolutes Gewicht kg:	100	200	300	400	500
Masse:	1.019	2.039	3.058	4.078	5.097
absolutes Gewicht kg:	600	700	800	900	1000
Masse:	6.116	7.136	8.155	9.175	10.194.

169. Die Dichtigkeit der Substanzen ist folgende:

Wasser.	Blei.	Gusseisen.	Glas.	Bronce.
0.0102	0.1161	0.0775	0.0273	0.0901
Kork.	Kupfer.	Neusilber.	w. Holz.	geh. Zinn.
0.0024	0.0889	0.0868	0.0051	0.0775.

170. Die Zahlen, mit welchen die nach dcm und kg berechneten Massen zu multipliciren sind, um sie in nachbenannten Einheiten ausgedrückt zu erhalten, sind folgende:

Ausgangseinheiten.	Masse.	Dichtigkeit.
m und 100 kg	$\frac{1}{10}$	100
cm und g	100	$\frac{1}{10}$
mm und mg	10000	$\frac{1}{100}$.

Die Dichtigkeit wird durch Multiplication des spec. Gewichts mit folgenden Zahlen erhalten:

bei m und 100 kg als Einheiten mit $\frac{1000}{981}$,
„ dcm „ kg „ „ „ $\frac{10}{981}$,
„ cm „ g „ „ „ $\frac{1}{981}$,
„ mm „ mg „ „ „ $\frac{1}{9810}$.

171. Die bewegende Kraft ist:

	1.	2.	3.	4.	5.
kg:	0.1	4	1.6	9	16.

172. Die Masse, auf welche die Erde 1 kg Druck ausübt, erhält auf der Oberfläche des

Mondes 0.173 kg,
Jupiters 2.684 kg Druck.

173. Die Beschleunigung beträgt:

	1.	2.	3.	4.	5.
dcm:	100	100	100	50	50.

174. Die bewegende Kraft betrug beim Körper mit
dem spec. Gewicht: 0.5... 2.5 k,
„ „ „ 11.4...57 k.

175. Die Dichtigkeit des bewegten Körpers betrug 0.0204, das specifische Gewicht 2.

Fall der Körper auf schiefen Ebenen und bei der Atwood'schen Fallmaschine ohne Berücksichtigung der Reibung.

176. Die bewegenden Kräfte und ertheilten Beschleunigungen sind:

Höhe der schiefen Ebene cm:	1	2	3	4	5
Kraft in g:	100	200	300	400	500
Beschl cm:	19.6	39.2	58.9	78.5	98.1
Höhe der schiefen Ebene cm:	6	7	8	9	10
Kraft in g:	600	700	800	900	1000
Beschl. cm:	117.7	137.3	157.0	176.6	196.2.

177. Das Herabgleiten mit 1 cm Fallraum pro 1 Secunde erfordert das Verhältniss von Höhe zur Länge der schiefen Ebene 2 : 981, bei 5 cm Fallraum das Verhältniss: 10 : 981 und bei 10 cm Fallraum pro 1 Secunde 20 : 981.

178. Die 12000 m lange Strecke hätte in 101 Secunden zurückgelegt werden müssen.

179. Die Beschleunigung beim Herabrollen auf der Rigibahn würde bei der geringeren Steigung 54 cm, bei der stärkeren Steigung 238 cm und bei der für die amerikanische Bahn angegebenen Steigung 310 cm betragen.

180. Folgende Zulagsgewichte bringen die darunter gestellten Fallräume der 1. Secunde hervor:

Zulagen g:	1	2	3	4	5
Fallraum in cm:	0.98	1.95	2.93	3.90	4.86.

181. Das Verhältniss des einseitigen Zulagsgewichtes zu einem der kleinen Gewichte muss bei nachstehenden Beschleunigungen den nachgenannten Werth haben:

Fallr. d. 1. Secd. cm:	0.5	1.0	1.5	2.0	5.0
Gewichtsverhältniss:	$\frac{1}{190}$	$\frac{1}{979}$	$\frac{1}{1633}$	$\frac{8}{977}$	$\frac{20}{971}$.

Bewegung bei Gegenwart von Reibungswiderständen.

182. Die zur Beseitigung der Reibung in der Bewegungsrichtung zuzusetzenden Kräfte müssen betragen bei:

Holz auf Holz trocken	360	g
„ „ „ mit Wasser benetzt	250	„
„ „ „ mit Schweineschmalz	70	„
Metall auf Metall trocken	180	„
„ „ „ mit Schweineschmalz	90	„
Holz auf Metall trocken	420	„

183. Die bewegenden Kräfte betragen je nach der Substanz des Körpers und der schiefen Ebene bei:

Holz auf Holz trocken	686	g
„ „ „ mit Wasser benetzt	741	„
„ „ „ mit Schweineschmalz	831	„
Metall auf Metall trocken	776	„
„ „ „ mit Schweineschmalz	821	„
Holz auf Metall trocken	656	„

184. Die Neigungswinkel müssen wegen Erreichung des beabsichtigten Effectes sein:

bei Holz auf Holz trocken	19° 51′
„ „ „ „ mit Wasser benetzt .	14° 6′
„ „ „ „ mit Schweineschmalz .	4° 4′
„ Metall auf Metall trocken	10° 16′
„ „ „ „ mit Schweineschmalz	5° 12′
„ Holz auf Metall trocken	22° 50′.

185. Der durchschnittliche Werth des Reibungscoëfficienten muss 0.137 gerechnet werden.

186. Die Reibungswiderstände absorbirten bei den einzelnen Versuchen:

	1.	2.	3.	4.	5.
mg:	1979	1729	1639	979	677.

187. Der Reibungscoëfficient betrug bei der Bewegung des Holzschlittens auf trockner Holzbahn 0.56, auf seifiger Holzbahn 0,17 und beim Wälzen auf Holzbahn 0.026.

188. Der Wagen geht bis zum Stillstehen noch 3398 m weit.

189 (300, 302). Die Endgeschwindigkeit v und die Bewegungszeit t des Körpers sind:

a) Nach dem freien Durchfallen der Höhe h der schiefen Ebene:

$$v=\sqrt{2gh}, \qquad t=\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

b) nach dem Herabgleiten auf der Länge l der schiefen Ebene ohne Reibung:

$$v=\sqrt{2gh}, \qquad t=\sqrt{\frac{2(h^2+b^2)}{gh}};$$

c) nach dem Herabgleiten auf der Länge l der schiefen Ebene mit Reibung:

$$v=\sqrt{2g(h-\varphi b)}, \qquad t=\sqrt{\frac{2(h^2+b^2)}{g(h-\varphi b}}.$$

Trägheitsmomente.

A. Trägheitsmomente von Linien.

190. 1. Die Hauptträgheitsmomente der Geraden sind:

$$A=0, \quad B=\gamma l.\frac{l^2}{12}, \quad C=\gamma l.\frac{l^2}{12};$$

2 (306). das Trägheitsmoment ist: $\gamma l.\frac{l^2}{3}$;

3 (307). das Trägheitsmoment ist: $\gamma l\left(d^2+\frac{l^2}{12}\right)$.

191. 1. Die Hauptträgheitsmomente des Quadrates sind:

$$A=4a\gamma.\frac{a^2}{6}, \qquad B=4a\gamma.\frac{a^2}{6}, \qquad C=4a\gamma\frac{a^2}{3};$$

2. das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Seite des Quadrates ist: $4a\gamma.\frac{5}{12}a^2$;

3. da $\alpha=\beta=45^0$, $\gamma=0$, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Diagonale:

$$4a\gamma.\frac{a^2}{6}.$$

192. 1. Die Hauptträgheitsmomente des Rechteckes sind:

$$A = [2a + 2b]\gamma \times \frac{b^2}{12} \cdot \frac{3a+b}{a+b},$$

$$B = [2a + 2b]\gamma \times \frac{a^2}{12} \cdot \frac{a+3b}{a+b},$$

$$C = [2a + 2b]\,\gamma \,.\, \frac{(a+b)^2}{12};$$

2. da

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{\beta^2 + b^2},$$

$$\cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\cos^2\gamma = 0,$$

so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Diagonale:

$$(2a + 2b)\,\gamma \cdot \tfrac{1}{3}\,\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2};$$

3. da der Abstand der neuen Axe von der Diagonale $\frac{b}{2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die neue Axe:

$$(2a + 2b)\,\gamma \cdot 1\tfrac{7}{12}\,\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

193. 1. Die Hauptträgheitsmomente der Kreisperipherie sind:

$$A = 2r\pi\gamma \,.\, \frac{r^2}{2},$$

$$B = 2r\pi\gamma \,.\, \frac{r^2}{2},$$

$$C = 2r\pi\gamma \,.\, r^2;$$

2. das Trägheitsmoment ist:

$$2r\pi\gamma \,.\, 2r^2;$$

3. da $\alpha = 45^0$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 45^0$ den Fall repräsentirt, so ist das Trägheitsmoment:

$$2r\pi\gamma \,.\, \tfrac{3}{4}r^2.$$

B. Trägheitsmomente von Flächen.

194. 1. Die Hauptträgheitsmomente des Quadrates sind:

$$A = a^2\gamma\,\frac{a^2}{12}, \quad B = a^2\gamma\,\frac{a^2}{12}, \quad C = a^2\gamma \cdot \frac{a^2}{6};$$

2. das Trägheitsmoment bezüglich einer Diagonale ist:

$$a^2\gamma \cdot \frac{a^2}{12};$$

3. ([313]) da das Perpendikel vom Mittelpunkt des Quadrates auf die Axe die Länge:

$$p = \frac{a}{2}\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta}$$

besitzt, so findet man für das Trägheitsmoment:

$$a^2\gamma \cdot a^2\left[\frac{\sin^2\alpha}{3} + \frac{\sin^2\beta}{3} - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2}\right].$$

195. 1. Die Hauptträgheitsmomente der Rechtecksfläche sind:

$$A = ab\gamma \cdot \frac{b^2}{12}, \qquad B = ab\gamma \cdot \frac{a^2}{12}, \qquad C = ab\gamma\left[\frac{a^2+b^2}{12}\right];$$

2. das Trägheitsmoment bezüglich einer Diagonale ist:

$$ab\gamma \cdot \tfrac{1}{6}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

196. 1. Die Hauptträgheitsmomente der Kreisfläche sind:

$$A = r^2\pi\gamma\frac{r^2}{4}, \qquad B = r^2\pi\gamma \cdot \frac{r^2}{4}, \qquad C = r^2\pi\gamma\frac{r^2}{2}.$$

Die Ableitung auf elementarem Wege geschieht ohne mühevolle Rechnungen aus dem Hauptträgheitsmomente der Kreisperipherie (Aufgabe 193).

C. Trägheitsmomente von Körpern.

197. 1. Die Hauptträgheitsmomente des Parallelepipedes sind:

$$A = abc\gamma \cdot \frac{b^2+c^2}{12}, \quad B = abc\gamma \cdot \frac{a^2+c^2}{12}, \quad C = abc\gamma \cdot \frac{a^2+b^2}{12};$$

2. das Trägkeitsmoment in Bezug auf die Hauptdiagonale ist:

$$T = abc\gamma \cdot \tfrac{1}{6}\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2};$$

3. da die Hauptträgheitsmomente beim Würfel $A=B=C=a^3\gamma\frac{a^2}{6}$ sind, so ist auch das Trägkeitsmoment bezüglich einer beliebigen durch den Schwerpunkt gelegten Axe:

$$a^3\gamma \cdot \frac{a^2}{6}.$$

198. 1. Das Trägheitsmoment bezüglich der grössten Diagonale ist:

$$r^2\pi h\gamma \cdot \frac{6r^2+5h^2}{24r^2+6h^2} \cdot r^2;$$

2. soll die Bedingung der Aufgabe erfüllt werden, so müssen die Hauptträgheitsmomente gleich sein, also:

$$\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}=\frac{r^2}{2},$$

$$\text{d. i. } h=r\sqrt{3}.$$

199. Das Trägheitsmoment der aufgehangenen Kugel in Beziehung auf den Aufhängepunkt ist:

$$\lambda l\,.\,\frac{l^2}{3}+\tfrac{1}{6}\,d^3\pi\gamma\,[(l+\tfrac{1}{2}d)^2+\tfrac{1}{10}\,d^2].$$

200 ([321]). Der Holzcylinder muss einen $\sqrt[4]{22.8}=2.1852$ Mal grösseren Durchmesser als der Bleicylinder haben.

Constante Kräfte an einem Körper mit einer festen Axe.

201. Die Kugel erlangt 117.7 dcm,
der Cylinder „ 94.18 dcm Winkelbeschleunigung.
Bei den Körpern von 96 kg Gewicht erlangt
die Kugel 6.13 dcm,
der Cylinder 4.91 dcm Winkelbeschleunigung.

202. Die Scheibe erlangt nach 1, 2 ..... 10 Secunden resp. 0.1, 0.2 ..... 1 dcm Winkelgeschwindigkeit.

203. Das Trägheitsmoment der Scheibe ist $\frac{100}{98.1}\times\frac{1}{2}\times 2^2$, welche Masse man sich am Umfange der Scheibe durch die Masse

$$\frac{100}{98.1}\times\frac{1}{2}$$

vertreten denken kann.

Das einseitige Zulagsgewicht von 0.2 kg hat nun in Summa folgende Massen zu bewegen:

$$\frac{100}{98.1}\times\frac{1}{2}+\frac{2\times 23.95+0.2}{98.1},$$

woraus durch leichte Rechnung für die Umfangsbeschleunigung 0.2 dcm gefunden wird. Die gestellten Fragen sind daher wie folgt zu beantworten:

1. Die Winkelbeschleunigung (in 1 dcm Entfernung von der Axe) beträgt 0.1 dcm;
2. die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes beträgt 2 cm.
3. die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe beträgt nach 1, 2 ..... 10 Secunden 0.1, 0.2 .... 1 dcm;
4. das sinkende Gewicht erlangt nach 1, 2 ..... 10 Secunden 2, 4 ..... 20 cm Geschwindigkeit;

5. die Senkung des Uebergewichtes beträgt nach

1, 2 . . . . . 10 Secunden
1, 4, 9 . . . . . 100 cm.

Flichkraft.

204 (342). Die Winkelbeschleunigung ist $\frac{3P}{\gamma l^2}$, daher die Winkelgeschwindigkeit am Ende der Zeit t: $\frac{3Pt}{\gamma l^2}$. Ist n eine sehr grosse Zahl und x die Entfernung eines Linientheilchens $\frac{l}{n}$ von der Axe, so ist die dieses Massentheilchen angreifende Centrifugalkraft:

$$\gamma \frac{l}{n}\left(\frac{3Pt}{\gamma l^2}\right)^2 . x,$$

und die Summe aller dieser Kräfte auf die Länge der ganzen Linie bezogen:

$$\frac{9}{2}\frac{P^2t^2}{l^2\gamma}.$$

205. Die Resultante ist ebensogross, als wenn während der Drehung die Masse des Prisma's in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre; man findet bei der Ausrechnung die Centrifugalkraft bei der Drehung um die Kante von 3 dcm = 64.03 kg,

„ „ „ 4 „ = 58.31 kg,
„ „ „ 5 „ = 50.00 kg.

206. Je nachdem die Drehungsaxe 1, 2 . . . . . 10 cm von der geometrischen Axe absteht, ist die Centrifugalkraft:

10, 20 . . . . . 100 kg.

207. Die Berechnung aus Radius und Winkelgeschwindigkeit ergiebt für die Centrifugalbeschleunigung:

0.03367 m;

2. die Beschleunigung der Schwere ohne Centrifugalkraft würde

9.81376 m

am Aequator betragen;

3. da die Centrifugalkraft mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit zunimmt, so würde eine 17.07 Mal grössere Winkelgeschwindigkeit Gleichheit von Schwere und Centrifugalkraft hervorbringen;

4. die Centrifugalbeschleunigung unter der Breite φ ist:

$0.03367 \cos\varphi$;

5. die Componente der Centrifugalbeschleunigung, welche der Schwere gerade entgegenwirkt ist:

$0.03367 \cos^2\varphi$;

die Componente senkrecht gegen die Schwere:

$$0.03367 \sin\varphi\cos\varphi;$$

6. die Beschleunigung der Schwere in der Breite φ ist nach Abzug der Centrifugalcomponente:

$$9.81376 - 0.03367\cos^2\varphi = 9.78009 + 0.03367\sin^2\varphi;$$

7. Zusammensetzung von Schwer- und Centrifugalkraft in der Breite φ führt zu dem Ausdrucke für die Tangente:

$$tg\,\alpha = 0.001715 \sin 2\varphi.$$

Der Winkel beträgt unter 45^0: 5′.9.

208. Die Axe muss durch den Schwerpunkt des Systems gehen, daher die Entfernung $\frac{11}{12}l$ von der Masse 9 haben; hat aber die Gerade die Masse 2, so muss die Axe um $\frac{10}{11}l$ von derselben Masse 9 abstehen.

209. Der Faden reisst bei 2 Umdrehungen pro Secunde.

210. Der Stab zerreisst bei 10 Umdrehungen pro Secunde.

211. Der Winkel x ist aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\cos x = \frac{g}{w^2 l}.$$

212 (nach Bary). Da die Centrifugalkraft und die Schwere der Kugel eine gegen die schiefe Ebene normale Resultante haben müssen, so bestimmt sich hieraus:

$$t = \frac{2\pi}{tg\,\alpha}\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Pendel.

213. Der Factor von $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ beträgt für:

1^0	2^0	3^0
1.0000	1.0001	1.0002
4^0	5^0	45^0 (351)
1.0003	1.0005	1.0400.

214 (352, 354). Die reducirte Länge des Drahtes, aus Trägheitsmoment und statischem Moment berechnet, beträgt $\frac{2}{3}l$, daher die Schwingungsdauer $\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$, und zwei Längen l u. l' der Drähte müssen im Verhältniss: $l : l' = 1 : n^2$ stehen, damit die Dauer der Schwingungen wie $1 : n$ ist.

215. 1. Beim Quadrat, Axe durch einen Eckpunkt ist die reducirte Länge λ und die Schwingungsdauer t:

$$\lambda = \tfrac{5}{6} a \sqrt{2}, \quad t = \pi \sqrt{\tfrac{5}{6} \frac{a\sqrt{2}}{g}};$$

2. beim Quadrat, Axe durch die Mitte einer Seite:

$$\lambda = \tfrac{7}{6} a, \quad t = \pi \sqrt{\tfrac{7}{6} \frac{a}{g}};$$

3. ([353]) beim Kreise, Axe durch die Peripherie ist:

$$\lambda = 2r, \quad t = \pi \sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

216. Beim Quadrat ist die reducirte Länge allgemein:

$$\lambda = c + \tfrac{1}{6} \frac{a^2}{c}, \quad \text{für } c = \frac{a}{2}, \quad \lambda = \tfrac{5}{6} a.$$

Beim Kreise ist:

$$\lambda = c + \tfrac{1}{2} \frac{r^2}{c}, \quad \text{für } c = \frac{r}{2}, \quad \lambda = \tfrac{3}{2} r.$$

217 ([356]). Die reducirte Länge des schwingenden Cylinders ist:

$$\lambda = r\sqrt{2} = 1.4142\, r.$$

218 ([360]). Die Schwingungsdauer ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g}\left[d + \tfrac{1}{12} \frac{b^2 + c^2}{d}\right]}.$$

Sie wird bei gegebenen $bc = f$ Minimum, wenn die Diagonale $\sqrt{b^2 + c^2}$ bei gegebenem Inhalt Minimum wird, d. h. wenn $b = c = \sqrt{f}$. Setzt man $b = \sqrt{f} + \Delta$, $c = \sqrt{f} - \Delta$, wo Δ sehr klein, so kommt für t:

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g}\left[d + \tfrac{1}{6} \frac{f + \Delta^2}{d}\right]},$$

d. h., wenn der Querschnitt anfängt aus dem Quadrat in ein Rechteck überzugehen, so wächst t.

219. Die reducirte Länge der Kugel ist allgemein:

$$\lambda = l + \tfrac{2}{5} \frac{r^2}{l},$$

daher die gesuchte Differenz $\lambda - l = 0.25$ mm.

220. Die Beschleunigung der Schwere ist hiernach:

Breite.	Breite.
0^0	45^0
9.7802 m	9.8055 m.

221. In der Breite φ ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{G(1 + 0.005194 \sin^2 \varphi)}},$$

oder, indem man $0.005194 \sin^2 \varphi$ als sehr kleine Grösse behandelt:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 - 0.002597 \sin^2 \varphi \right]$$
$$= (1 - 0.002597 \sin^2 \varphi) \tau.$$

222. Da $g = \pi^2 l$, so ist $\triangle g = \pi^2 \triangle l$, und wenn $\triangle l = 0.1$ mm, so ist $\triangle g = 0.99$ mm.

223. Die reducirten Längen des unbelasteten und belasteten Pendels sind resp.:

$$\lambda = \frac{r^2}{s} \text{ und } \frac{r^2 + l^2}{s + l},$$

daher:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r^2}{s} \frac{1}{g}} \text{ und } t_1 = \pi \sqrt{\frac{r^2 + l^2}{s + l} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Die Gleichungen ergeben:

$$s = \frac{l}{g} \frac{g t_1^2 - \pi^2 l}{t^2 - t_1^2},$$

$$r^2 = \frac{l t^2}{\pi^2} \frac{g t_1^2 - \pi^2 l}{t^2 - t_1^2}.$$

224. Die Schwingungsdauer beträgt bei jedem der gegebenen drei Beispiele:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

225.*) 1. Die reducirte Länge der Wage beträgt:

$$\frac{G r^2 + 2P(l^2 + a^2)}{Gs + 2Pa},$$

oder, da a^2 gegen l^2 sehr klein, angenähert:

$$\frac{G r^2 + 2Pl^2}{Gs + 2Pa},$$

daher ist 1. $$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{G r^2 + 2Pl^2}{Gs + 2Pa}}.$$

Ferner ist 2. $$n = \frac{z}{\sigma} \frac{pl}{Gs + 2Pa}.$$

---

*) (Die Theorie der gleicharmigen Wage mit Rücksicht auf die elastische Biegung des Balkens von Hartig, polyt. Centralbl., 1859, S. 1042.)

Entwickelt man aus dem letzten Ausdruck $Gs + 2Pa$ und setzt es in t ein, so erhält man:

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{Gr^2 + 2Pl^2}{z \cdot pl} \sigma n},$$

und nach Veränderung von s und a:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{Gr^2 + 2Pl^2}{z \cdot pl} \sigma n'},$$

daher:

$$t : t' = \sqrt{n} : \sqrt{n'};$$

4. die Schwingungsdauer beträgt:

bei leeren Schalen:	17.28	Sec.
„ 100 g Belastung	19.18	„
„ 1100 g Belastung	23.57	„ ;

5. Zur Berechnung von r und s dienen:

$$t_o = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{r^2}{s}},$$

$$n_o = \frac{z}{\sigma} \frac{pl}{Gs};$$

6. zur Berechnung von a und b sind brauchbar:

$$t = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{Gr^2 + 2Pl^2}{Gs + 2P(a + bP)}},$$

$$t' = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{Gr^2 + 2P'l^2}{Gs + 2P'(a + bP')}}.$$

Stoss der Körper.

226. Die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper beträgt nach dem Stosse:

	1.	2.	3.	4.	5.
cm:	$10\frac{1}{3}$	5	7.571	11.520	14.483
	6.	7.	8.	9.	10.
cm:	9.667	3	4	0.96	0.00.

227. 1. Die Geschwindigkeit ist nach dem unelastischen Zusammenstosse:

	1.	2.	3.	4.	5.
cm:	11	6	3	8	0;

2. die Geschwindigkeitszunahmen sind nach dem unelastischen Zusammenstosse:

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Masse cm:	3	2	3	8	6
2. Masse cm:	−2	−4	−9	−8	−6;

3. die Geschwindigkeitszunahmen sind nach dem vollkommen elastischen Zusammenstosse:

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Masse cm:	6	4	6	16	12
2 Masse cm:	−4	−8	−18	−16	−12;

4. die Geschwindigkeiten der Massen sind nach dem vollkommen elastischen Zusammenstosse:

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Masse cm:	14	8	6	16	6
2. Masse cm:	9	2	−6	0	−6;

5. Die Geschwindigkeitszunahmen sind nach dem unvollkommen elastischen Zusammenstosse im Sinne der speciellen Annahme:

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Masse cm:	4.5	3	4.5	12	9
2. Masse cm:	−3	−6	−13.5	−12	−9;

6. die Geschwindigkeiten nach dem unvollkommen elastischen Zusammenstosse sind:

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Masse cm:	12.5	7	4.5	12	3
2. Masse cm:	10	4	−1.5	4	−3.

228. 1. Der Definition entsprechend ist beim unelastischen Stosse für:

$$\text{Masse m:}\quad c = \frac{mv + m'v'}{m + m'} = v - \frac{m'(v - v')}{m + m'},$$

$$\text{„ m':}\quad c = \frac{mv + m'v'}{m + m'} = v' + \frac{m(v - v')}{m + m'};$$

beim vollkommen elastischen Stosse:

$$\text{Masse m:}\quad c = v - 2\,\frac{m'(v - v')}{m + m'},$$

$$\text{„ m':}\quad c' = v' + 2\,\frac{m(v - v')}{m + m'};$$

beim unvollkommen elastischen Stosse:

$$\text{Masse m:}\quad c = v - (1 + k)\,\frac{m'(v - v')}{m + m'},$$

$$\text{„ m':}\quad c' = v' + (1 + k)\,\frac{m(v - v')}{m + m'};$$

2. Ausrechnung von U aus den eben gegebenen Werthen von c und c' ergiebt beim unelastischen Stosse:

$$U = \frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2;$$

beim vollkommen elastischen Stosse:

$$U = 0;$$

beim unvollkommen elastischen Stosse:

$$U = (1-k^2)\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2.$$

229. Die letzte (kleinste) Kugel geht mit der Geschwindigkeit $\left(\frac{1+k}{1+\alpha}\right)^n v$ ab, da die zweite, wenn sie frei wäre, die Geschwindigkeit $\left(\frac{1+k}{1+\alpha}\right)v$ erhalten würde.

230. Nach dem ersten, zweiten, dritten . . . n^{ten} Auftreffen der Kugel mit der zurückwerfenden Ebene wird die Steighöhe:

$$k^2h,\ k^4h,\ k^6h \ldots k^{2n}h$$

erreicht.

231. Die Geschwindigkeit der Mitte des Recepteurs wird:

$$\frac{mv}{m+\frac{T}{a^2}}.$$

Wirkungsgrösse der Kräfte.

232. Die Wirkung der bewegenden Kraft beträgt:

100, 2500, 10000, 22500 und 40000

kgm $(\frac{1}{2}mv^2)$.

233. Die Wirkung der Kraft beträgt resp.:

2100, 7500, 20000, 12500, 17500

kgm $(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2)$.

234. Die am Massenmittelpunkt angreifende Kraft hat die doppelte Grösse der Winkelgeschwindigkeit daselbst hervorzubringen, demnach ist ihre Wirkung:

	1.	2.	3.	4.	5.
kgm:	100	1600	1500	1200	700.

235. Die Wirkungsgrösse der hebenden Kraft beträgt bei der Hebung und Geschwindigkeitsvermehrung:

	1.	2.	3.	4.	5.
kgm:	196.2	197.2	199.2	196.2	208.2.

236. Durch Division der pro Secunde geleisteten Arbeit durch 75 erhält man:

	1.	2.	3.	4.	5.
Pferdekraft:	$1\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	12	$21\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$.

237. Die Länge des bis zur Aufzehrung der verfügbaren Wirkungsfähigkeit zurückgelegten Weges beträgt:

1. $\frac{1}{2}\frac{P}{g}c^2 : P\varrho = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\varrho g}$;

2. $\frac{1}{2}\frac{P}{g}c^2 : P = \frac{1}{2}\frac{c^2}{g}$;

3. $\frac{1}{2}\frac{P}{g}(c\sin\varepsilon)^2 : P = \frac{1}{2}\frac{c^2\sin^2\varepsilon}{g}$.

238. Die dem Rade innewohnende Wirkungsfähigkeit ist nach Zurücklegung des Weges:

$$\frac{1}{2}.50 \times (3.1416)^2 : \frac{1}{4}$$

von einem in 1 m Entfernung von der Axe befindlichen Punkte aufgezehrt, woraus man:

157.08 Umdrehungen

berechnet.

Druck flüssiger Körper auf den Boden und die Seitenwände der einschliessenden Gefässe.

239. Der Druck auf die Bodenfläche beträgt 196.35 kg, und jedes der vier Ventile erhält resp.: 1.257, 1.963, 2.827 und 5.027 kg Druck.

240. Die 10 cm hohe Schicht veranlasst 13.6 kg Bodendruck; jedes weitere cm Flüssigkeitshöhe 1.36 kg Vermehrung des Bodendruckes.

241. Die Differenz zwischen Bodendruck und Gewicht des Füllungswassers beträgt:

	1.	2.	3.	4.	5.
kg:	14	42	70	98	126.

242. Der Druck auf die Oberfläche nach Unten und auf die Unterfläche nach Oben ist resp:

10290 kg

und 10291.0 kg.

Jede Seitenfläche erhält einen Horizontaldruck von:

10290.5 kg.

243. Das Moment bezüglich der Oberfläche ist leicht elementar durch Summirung der Momente der unendlichvielen Horizontalstreifen zu berechnen, in welche man jede Seitenfläche zerlegen kann; man findet hierauf durch Division mit der Resultante des Seitendruckes, dass der Mittelpunkt des Druckes in der Entfernung $\frac{2}{3}c$ von Oben, d. i. $\frac{1}{3}c$ von der Unterfläche liegt.

244. Ist γ das Gewicht der Kubikeinheit, so ist der Ausdruck für die Summe der Seitendrücke:

$$P = (2a + 2b)\frac{h^2}{2}\gamma.$$

Die Aufgabe ist, wie man aus der Formel erkennt, identisch mit der Aufgabe, ein Rechteck von kleinstem Umfang bei gegebenem Inhalt zu construiren, es wird also:

$$a = b = \sqrt{f}.$$

Hydrostatischer Auftrieb und Bestimmung des specifischen Gewichtes fester und flüssiger Körper.

245. Die Last, die unter Wasser gerade noch gehoben werden kann, beträgt:

	Basalt	Porphyr	Eisen	Silber	Platin
kg:	$83\frac{1}{3}$	$62\frac{1}{2}$	$57\frac{9}{13}$	$55\frac{5}{9}$	$52\frac{1}{2}$.

Unter Wasser gedrückt kann ein Holzstück von 50 kg noch festgehalten werden.

246. Das Gewicht der Substanzen beträgt:

	Ebenholz	Asphalt	Brauneisenstein	Eisen	Kupfer
g:	0	$9\frac{1}{11}$	75	$86\frac{2}{3}$	$88\frac{8}{9}$.

247. Die austretenden Wassermengen betragen bei:

	Messing	Kupfer	Silber	Blei	Gold
cbcm:	1176	1111	952	877	519.

248. Die Gewichte der Substanzen sind:

	(430). Gusseisen in Alkohol	(432). Glas in Leinöl	(433). Glas in Seewasser
mg:	8899	6582	6255.

249. Das specifische Gewicht der Substanzen ist:

(435) von Krystallglas 2.5,
(437) „ Gold 19.11,
(440) „ Salpeter 2.00.

250. Das specifische Gewicht berechnet sich aus den Wägungen, wie folgt:

(434)	Blei	11.39	Platin (Münze)	21.34
(436)	Kupfer	9.00	Porcellan	2.49
(438)	Messing	8.00	Bernstein	1.07
(439)	Silber	10.545	Eisendraht	7.75
	Bronce	8.6	graues Roheisen	7.21.

251. Die Wägungen ergeben folgende specifischen Gewichte:

doppelt kohlensaures Kali	2.01
schwefelsaures Kali	2.62
dichter Kalkstein	2.50
dichter Gyps	2.00
natürlicher Kupfervitriol	2.80.

252 (441, 442). Es ergiebt sich durch Rechnung:

specifisches Gewicht von Faulbaumholz	0.486
„ „ „ Erlenholz	0.544.

253. Die Rechnung ergiebt folgende Zahlen für das specifische Gewicht:

(443)	Zinnstein	6.5
	Marmor	2.75
	Neusilberdraht	8.55
	Pyrop	3.78
	Bleiweiss	6.40.

254. Die aus den Versuchen berechneten specifischen Gewichte sind:

Vitriolöl	1.85
Terpentinöl	0.86
Alkohol	0.792
Moselwein	0.916
Bier	1.030.

255. Die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten sind:

absol. Alkohol	0.791
Kreosot	1.037
Olivenöl	0.905
Rüböl	0.915
Salpetersäure	1.22.

256. Das specifische Gewicht s ist:

$s = \frac{L}{L-W}$, daher:

$$s+\Delta s = \frac{L}{L-W-\Delta W} = \frac{L}{L-W\left(1-\frac{\Delta W}{L-W}\right)} = \frac{L}{L-W}\left(1+\frac{\Delta W}{L-W}\right),$$

$$s+\Delta s = s+\frac{L\Delta W}{(L-W)^2} = s+s^2\frac{\Delta W}{L},$$

$\Delta s = s^2\frac{\Delta W}{L}$, daher:

$s=$	2	4	6	8	10
$\Delta s=$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
$s=$	12	14	16	18	20
$\Delta s=$	0.01	0.02	0.03	0.03	0.04.

257. Man findet leicht:

$$s = \frac{L}{L-F}\gamma, \quad \Delta s = \frac{L}{(L-F)^2}\gamma\Delta F = \frac{s^2}{\gamma}\frac{\Delta F}{L};$$

$s=$	2	4	6	8	10
$\Delta s=$	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01.

258. Das specifische Gewicht ist:

$$s = \frac{K}{P+K-G},$$

$$\Delta s = s^2\frac{\Delta G}{K};$$

$s=$	2	4	6	8	10
$\Delta s=$	0.00	0.02	0.04	0.06	0.10
$s=$	12	14	16	18	20
$\Delta s=$	0.14	0.20	0.26	0.32	0.40.

259. Es ist: $s = \frac{f-p}{w-p}$, $\Delta s = \frac{f-p}{w-p}\cdot\frac{\Delta f}{f-p} = s\frac{\Delta f}{f-p}$;

$s=$	2	4	6	8	10
$\Delta s=$	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
$s=$	12	14			
$\Delta s=$	0.01	0.01.			

260. $s = \frac{L-F}{L-W}$, $\Delta s = -s\frac{\Delta F}{L-F}$.

Für $s = 1,\ 1.5,\ 2,\quad \Delta s = -0.00$.

261. Das mittlere specifische Gewicht der Platinkugel + leichterem Körper muss > 1 bleiben, daher entsprechen einander:

spec. Gewicht:	0.1	0.2	0.3
Körpergewicht g:	1.111	2.500	4.286
spec. Gewicht:	0.4	0.5	0.6
Körpergewicht g:	6.667	10.0	15.0
spec. Gewicht:	0.7	0.8	0.9
Körpergewicht g:	23.333	40.0	90.0.

262. Gewicht und Auftrieb müssen einander gleich sein; diese Bedingung führt zu dem Werthe:

$$x = \frac{P}{3} \cdot \frac{s-1}{s},$$

und für $s = 1.1$ zu:

$$x = \tfrac{1}{33} P.$$

Tiefe des Eintauchens schwimmender Körper.

263. Da in Flusswasser 900 mm, in Meerwasser nur 874 mm unter Wasser sind, beträgt die Hebung 26 mm.

264. Der Blechwürfel sinkt ein in:

Alkohol	Wasser	Meerwasser	Schwefelsäure	Quecksilber
ganz unter	10 cm	9.7 cm	5.4 cm	0.7 cm.

265. Der Blechwürfel sinkt ein in:

	Alkohol	Wasser	Meerwasser	Schwefelsäure	Quecksilber
dcm:	2.50	2.00	1.94	1.09	0.15.

Das Zusatzgewicht muss in kg betragen:

0	12.5	14.4	65.1	800.

266. Zwischen s, σ und γ findet die Beziehung:

$$s = \frac{\sigma + \gamma}{2}$$

statt.

Eine eiserne Kugel, spec. Gewicht 7.6, erfordert zum Zustandekommen der Erscheinung eine obere Flüssigkeit vom spec. Gewicht 1.6.

267. Dies Gesetz des hydrostatischen Auftriebes führt, wenn o der in der obern Flüssigkeit eintauchende, u der in der untern Flüssigkeit eintauchende Theil ist, zu den Gleichungen:

$$v = u + o,$$
$$vs = u\sigma + o\gamma,$$

daher:

$$o = v\,\frac{\sigma - s}{\sigma - \gamma}, \qquad u = v\,.\,\frac{s - \gamma}{\sigma - \gamma}.$$

Bei dem speciellen Beispiele ist:

für Wasser: $o = \frac{10}{21} v$, $u = \frac{11}{21} v$,

„ Alkohol: $o = \frac{15}{32} v$, $u = \frac{17}{32} v$.

268 (460). Der Querschnitt des Rohres ab in □cm sei q, P das absolute Gewicht des Instrumentes in Grammen, V das Volumen von Unten bis b in cbcm. Zur Bestimmung von y sind die drei Gleichungen erforderlich:

Fig. 1

$$P = V\sigma,$$
$$P = [V + q \,.\, l]\gamma,$$
$$P = [V + q \,.\, x]y.$$

Bestimmung von y aus der letzten Gleichung und Einsetzung der aus den beiden ersten Gleichungen ermittelten Werthe von P und V führt zum Ausdrucke:

$$y = \frac{\gamma\sigma}{\gamma + \frac{x}{l}(\sigma - \gamma)}.$$

Für das zu leichteren Flüssigkeiten bestimmte Aräometer ergiebt sich folgende Tabelle der Gradwerthe:

Zahl der Scala:	spec. Gewicht:	Correction:
0.700	0.700	0.000
0.750	737	— 13
800	778	— 22
850	824	— 26
900	875	— 25
950	933	— 17
1.000	1.000	0.000.

Bei dem Aräometer für schwerere Flüssigkeiten gilt folgende Tabelle:

Zahl der Scala:	spec. Gewicht:	Correction:
1.000	1.000	0.000
1.100	1.053	— 0.047
1.200	1.111	— 89
1.300	1.176	— 124
1.400	1.250	— 150
1.500	1.333	— 167
1.600	1.429	— 171
1.700	1.538	— 162
1.800	1.667	— 133
1.900	1.818	— 82
2.000	2.000	0.000.

269. Das unbeschwerte Aräometer möge mit dem Volumen v_1 in die Flüssigkeit vom specifischen Gewichte y eintauchen; es ist dann:

$$v_1 y = P.$$

Soll es nach der Beschwerung mit dem Gewichte z mit demselben Volumen in die Flüssigkeit vom specifischen Gewicht σ eintauchen, so muss sein:

$$v_1 \sigma = (P + z).$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{P+z}{P},$$

$$z = P\frac{\sigma - y}{y}.$$

Eintauchen in Wasser bis zu den den specifischen Gewichten 0.8 und 0.9 entsprechenden Theilstrichen erfordert resp. die Zusatzgewichte:

$$\tfrac{1}{4}P \text{ und } \tfrac{1}{9}P.$$

Beim Aräometer für schwerere Flüssigkeiten entsprechen sich folgende Zusatzgewichte und specifischen Gewichte:

spec. Gewicht:	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
Zusatzgewicht:	$\frac{9}{11}P$	$\frac{2}{3}P$	$\frac{7}{13}P$	$\frac{3}{7}P$	$\frac{1}{3}P$
spec. Gewicht:	1.6	1.7	1.8	1.9	
Zusatzgewicht:	$\frac{1}{4}P$	$\frac{3}{17}P$	$\frac{1}{9}P$	$\frac{1}{19}P.$	

Capillarität.

270. Der tiefere Stand des Quecksilbers beträgt in Röhren von dem Halbmesser:

Dchm. mm:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
Tiefstand mm:	45	22.5	15	11.3	9	7.5
Dchm. mm:	0.7	0.8	0.9	1.0		
Tiefstand mm:	6.4	5.6	5.0	4.5.		

271. Der Alkohol steht bei nachfolgenden Röhrenweiten höher als das Niveau im grossen Gefässe:

Röhrenweite mm:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Erhebung der Flüssigkeit:	121.6	60.8	40.5	30.4	24.3
Röhrenweite mm:	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Erhebung der Flüssigkeit:	20.3	17.4	15.2	13.5	12.2.

272. Das Wasser zeigt bei nachfolgenden Röhrenweiten die dabei bemerkte Niveaudifferenz gegen das weite Gefäss:

Röhrenweite mm:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Niveaudifferenz mm:	302.6	151.3	100.9	75.7	60.5
Röhrenweite mm:	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Niveaudifferenz mm:	50.4	43.2	37.8	33.6	30.3

273. Die Gleichung der nach dem Steigen der Flüssigkeit gebildeten Oberflächencurve ist:

bei Alkohol: $xy = 6080$,
bei Wasser: $xy = 15130$;

Beide sind gleichseitige Hyperbeln.

Ausfluss von Flüssigkeiten.

274. Folgende Druckhöhen und pro Secunde ausfliessenden Wassermengen correspondiren:

Druckhöhe dcm:	1	4	9	16	25
Ausflussmenge li:	8.628	17.257	25.885	34.514	43.142.

275. Entsprechend sind die nachfolgend aufgeführten Flächeninhalte der Ausflussöffnung und Ausflussmengen:

Ausflussöffnung □cm:	25	16	9	4	1
Ausflussmengen li:	647.1	414.2	233.0	103.5	25.9.

276. Die erforderliche Grösse der Ausflussöffnung beträgt bei:

Ausflusszeit Secunden:	1	2	3
□cm Oeffnung:	1000	500	$333\frac{1}{3}$
Ausflusszeit Secunden:	4	5	6
□cm Oeffnung:	250	200	$166\frac{2}{3}$
Ausflusszeit Secunden:	7	8	9
□cm Oeffnung:	$142\frac{6}{7}$	125	$111\frac{1}{9}$.

277. Nach den Gesetzen des Wurfes mit horizontaler Anfangsgeschwindigkeit findet man, dass folgende Druckhöhen im Ausflussgefäss und horizontale Sprungweiten des austretenden Strahles einander entsprechen:

Druckhöhe cm:	10	40	90	160	250
Sprungweite cm:	185	370	555	740	925.

278. Von dem bekannten Satze ausgehend, dass die Ausflusszeit für das im Gefässe enthaltene Quantum doppelt so gross bei sinkendem Niveau, als bei constant erhaltenem Niveau ist, findet man folgende Ausflusszeiten:

bei dem Niveau in cm:	19.62	78.48	176.58	313.92	490.5
Ausflusszeit in Sec.:	500	1000	1500	2000	2500.

279. Die Ausflussgeschwindigkeit beträgt:

20 30 40 50 60 cm.

Die Höhe $2g$, $\frac{g}{2}$ und $\frac{g}{8}$ der Ausflussöffnung über dem Fussboden bewirkt, dass die Ausflussgeschwindigkeit gleich:

der halben, der einfachen, der doppelten Sprungweite ist.

Luftdruck und Barometer.

280 ([479,480]). Der Druck der Luft beträgt bei 760 mm Barometerstand und auf die Fläche von 1 □m 10334.5 kg.

281. Der Druck gegen die Oberfläche einer Halbkugel ist ebensogross als der Druck gegen deren Grundfläche. Man findet nun leicht, dass sich folgende Expansivkräfte der in den Halbkugeln enthaltenen Luft und Pressungen der einen gegen die andere entsprechen:

Expansivkraft mm:	684	608	532	456	380
Druck kg:	8	16	24	32	41
Expansivkraft mm:	304	228	152	76	(0)
Druck kg:	49	57	65	73	(81).

282. Der Druck der flüssigen Säule auf 1 □dcm Fläche beträgt bei:

	Terpentinöl	Schwefelkohlenstoff	Rüböl
kg:	6.5	9.6	7.0
	Schwefeläther	Quecksilber	Wasser
kg:	5.4	103.3	7.6.

283. Die Höhe der Flüssigkeitssäule würde betragen bei:

	Rüböl	Terpentinöl	Schwefelkohlenstoff	Aether	Wasser
m:	11.3	12.0	8.2	14.6	10.3.

Mariotte's Gesetz.

284. Der am Stempelgriff in der Richtung nach Aussen anzubringende Druck beträgt:

Länge des Luftraumes cm:	30	40	50	60	70
Druck:	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{3}{5}d$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{5}{7}d$.

285. Der Stempelgriff muss in der Richtung von Aussen nach Innen mit der Kraft gedrückt werden:

ursprüngl. Länge des cylindr. Luftraums:	$2r$	$4r$	$6r$	$8r$	$10r$
Kraft:	$3d$	$6d$	$9d$	$12d$	$15d$.

286. Das specifische Gewicht der Luft ist:

Druck mm:	spec. Gew.:	Druck mm:	spec. Gew.:
750	0.001 276 6	760	0.001 293 6
751	278 3	761	295 3
752	280 0	762	297 0
753	281 7	763	298 7
754	283 4	764	300 4
755	285 1	765	302 1
756	286 8	766	303 8
757	288 5	767	305 5
758	290 2	768	307 2
759	291 9	769	308 9
760	0.001 293 6	770	0.001 310 6.

287 ([491–493]). Die Constanz der Summe der Gewichte der eingeschlossenen Gasmengen vor und nach dem Mischen führt für das specifische Gewicht des Gemisches zu dem Ausdrucke:

$$\frac{R\gamma + R_1\gamma_1 + \ldots}{R + R_1 \ldots .}$$

Die Expansivkraft des Gemisches ist, da specifisches Gewicht und Expansivkraft proportionale Grössen sind:

$$\frac{RB + R_1B_1 + \ldots .}{R + R_1 + \ldots .}$$

Die mittlere Expansivkraft bei dem speciellen Beipiel ist:

$$93\tfrac{3}{7} = 93.43 \text{ mm}.$$

288. Ist

v das ursprüngliche Volumen der Luft im kurzen Schenkel,
l das Volumen nach dem Zugiessen der Quecksilbermenge z,
b der Barometerstand während des Versuches,
so erhält man nach dem Mariotte'schen Gesetz die Bedingungsgleichung:

$$vb = l\,[b + z - 2v + 2l],$$

und hieraus

$$z = (v - l)\left(2 + \frac{b}{l}\right).$$

Diese Gleichung, die beiläufig gesagt, auch zur Ermittelung des Barometerstandes b durch das Experiment benutzt werden konnte, liefert nun für die zuzusetzenden Quecksilberlängen:

Luftvolumen cm:	9	8	7
Quecksilberzusatz cm:	$10\frac{4}{9}$	23	$38\frac{4}{7}$
Luftvolumen cm:	6	5	4
Quecksilberzusatz cm:	$58\frac{2}{3}$	86	126
Luftvolumen cm:	3	2	1
Quecksilberzusatz cm:	$191\frac{1}{3}$	320	702.

Anmerkung. Ist b die gesuchte Grösse, so ergiebt die allgemeine Gleichung:

$$b = \frac{l(z-2v+2l)}{v-l} = l\left[\frac{z}{v-l} - 2\right];$$

soll l bestimmt werden,

$$l = -\frac{b+z-2v}{4} \pm \sqrt{\frac{vb}{2} + \left[\frac{b+z-2v}{4}\right]^2},$$

in welchem Ausdrucke die Wurzelgrösse nur positiv genommen werden darf, da ein negatives l keinen Sinn hat.

289. Die Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes führt schliesslich zu dem Ausdrucke:

$$x = -\frac{B-n}{2} + \sqrt{Bm + \left(\frac{B-n}{2}\right)^2}.$$

In diesem Ausdrucke darf die Wurzelgrösse nur positiv genommen werden; der Ausdruck mit negativer Wurzelgrösse hat keine physikalische Bedeutung.

In den speciellen Zahlenbeispielen entsprechen einander folgende Längen der eingeschlossenen Luftsäule und Aufwärtsbewegungen des Rohres:

Volumenlängen cm:	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0
Verschiebung cm:	1.7	3.3	4.9	6.4	7.9.

Auch dieses Experiment kann zur Bestimmung des äussern Barometerstandes benutzt werden. Die Gleichung, aus welcher der oben angegebene Werth von x hervorgegangen ist, liefert dann für B:

$$B = x\,\frac{n-x}{x-m}.$$

290. Den gefundenen Niveaudifferenzen entsprechen folgende ursprünglich vorhandene Luftvolumina:

Niveaudifferenz cm:	1	2	3	4	5
Luftvolumen cm:	6	12	$17\frac{1}{2}$	23	29

Niveaudifferenz cm:	6	7	8	9	10
Luftvolumen cm:	35	41	47	$52\frac{1}{2}$	58.

291 (nach *Lamé*). Das Mariotte'sche Gesetz führt schliesslich zu dem Werthe von x:

$$x = \frac{2h + p^1 - p}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(2h - p^1 - p)^2 + 8np^1}.$$

Diese beiden Werthe von x sind immer reell, allein der dem oberen Werthe des Wurzelzeichens entsprechende kann nicht genommen werden, da er grösser als h ist, daher kann nur der Werth gelten mit der negativ genommenen Wurzelgrösse.

292 (nach *Lamé*). Durch das Mariotte'sche Gesetz erhält man unmittelbar die Bedingungsgleichung:

$$nb = x(h - x),$$

daher:

$$x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4nb}}{2}.$$

Der Werth mit der negativen Wurzelgrösse wird zuerst erreicht und gilt allein, da der andere physikalische Werth nicht herzustellen ist. Das Zahlenbeispiel giebt für x die Lösung:

$$x = \tfrac{1}{2}\text{mm}.$$

293 (nach *Lamé*). Das Mariotte'sche Gesetz führt zu folgendem Ausdrucke für x:

$$x = u\frac{h - u}{t - u},$$

welcher bei den Beispielen giebt:

	1.	2.	3.	4.
$x =$	764 mm	765 mm	760 mm	753 mm.

Luftpumpe.

294 (515). Es sei bei der im Gesammtraume G eingeschlossenen Luft:

B_{n-1} die Expansivkraft nach dem $n-1^{\text{sten}}$ Kolbenaufzug,

B_n „ „ „ „ n^{ten} „

Zwischen beiden besteht die Beziehung:

$$B_n = \frac{GB_{n-1} + SB}{G + S + C} \text{ oder: I., } B_n = pB_{n-1} + qB.$$

Bildet man nach I., die Ausdrücke: pB_{n-1}, p^2B_{n-1}, etc., so findet man hierauf durch Addition:

$$\text{II.,}\quad B_n = B\left[p^n + q\,\frac{1-p^n}{1-p}\right].$$

295 (516 b. m. 523.) Einsetzung der in der Aufgabe gegebenen Inhalte in die betreffenden Formeln der vorigen Auflösung ergiebt schliesslich die Expansivkraft der eingeschlossenen Luft nach dem n^{ten} Kolbenaufzuge:

$$B_n = 0.063 + 759.94\,(0.84751)^n.$$

Die Expansivkraft ergiebt sich nach der Berechnung aus diesem Ausdruck.

Nummer des Kolbenzugs:	1	2	3	4
Expansivkraft mm:	644	546	463	392
Nummer des Kolbenzugs:	5	10	40	∞
Expansivkraft mm:	332	145	1	0.06.

296. Man findet sehr leicht, dass allgemein nach $n$facher Wiederholung der Operation die Dichtigkeit den Werth:

$$\left(\frac{R}{R+Q}\right)^n$$

erlangt.

Dieser Ausdruck ergiebt die Dichtigkeit d für $n = 10$ und:

$R =$	$0.1\,Q$	$0.2\,Q$	$0.3\,Q$	$0.4\,Q$	$0.5\,Q$	
$d =$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
$R =$	Q	$2\,Q$	$3\,Q$	$4\,Q$	$5\,Q$	$10\,Q$
$d =$	0.00	0.02	0.06	0.11	0.16	0.39.

Aërostatischer Auftrieb.

297. Der Auftrieb beträgt bei dem specifischen Gewicht des Körpers:

spec. Gew.:	1	2	3	4	5
Auftrieb mg:	1294	647	431	323	259
spec. Gew.:	6	7	8	9	10
Auftrieb mg:	216	185	162	144	129
spec. Gew.:	11	12	13	14	15
Auftrieb mg:	118	108	100	92	86
spec. Gew.:	16	17	18	19	20
Auftrieb mg:	81	76	72	68	65
spec. Gew.:	21	22			
Auftrieb mg:	62	59.			

298. Die Abwägung des Körpers in der Luft führt zu folgender Gleichung:

$$M - \lambda \frac{M}{\Delta} = m - \lambda \frac{m}{\delta},$$

daher

$$M = m\left(1 + \frac{\lambda}{\Delta} + \frac{\lambda}{\delta}\right),$$

und die Correction

$$z = m\lambda\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}\right).$$

A. Die allgemeine Formel für die Correction führt bei der Wägung mit den leichteren Gewichten zu den Correctionen:

spec. Gew. des Körpers:	1	2	3	4	
Correction mg:	1059	459	259	159	
spec. Gew. des Körpers:	5	10	15	20	22
Correction mg:	99	−21	−61	−81	−87.

B. Bei der Wägung mit Platingewichten ist:

spec. Gew. des Körpers:	1	2	3	4	
Correction mg:	1145	545	345	245	
spec. Gew. des Körpers:	5	10	15	20	22
Correction mg:	185	65	25	5	0.

299 ([527, 528]). Der Inhalt muss wenigstens betragen bei:

Gew. des Ballons g:	1.8	2	5	10	100
Inhalt cbcm:	1489	1654	4135	8271	82708.

300 ([529–532]). Nur der Ballon von 1.5 g Gewicht sinkt; die übrigen steigen.

301 ([533]). Aërostatischer Auftrieb minus Gewicht von Ballon nebst Füllung betragen:

7.893 g.

([534]). Es beträgt:

Gewicht von Ballon nebst Füllung	2520.6	kg
Masse „ „ „ „	256.97	
Bewegende Kraft	15151	kg
Beschleunigung aufwärts	58.96	m.

Druck der Luft in einer unendlichhohen, cylindrischen Röhre.

302. Der Druck auf die im Horizont gelegene Fläche von 1 □m Inhalt ist:

10332.96 kg;

da 1 cbm Luft 1.29 kg wiegt, ist er ein m höher:

10331.67 kg.

303. Eintheilung der n m hohen Luftsäule in n Horizontalschichten von je 1 m Höhe führt zur Auflösung. Der Druck am Ende der ersten, der zweiten, ... $n$ten Schicht vom Boden gerechnet sei P_1, P_2, P_3 .... P_n. Nimmt man an, dass der Druck innerhalb jeder Horizontalschicht gleichgross sei, so ergiebt sich leicht, dass die Gewichte der einzelnen Schichten sich verhalten, wie die Drücke, denen sie unterliegen, d. h.

$$P_{n-1} - P_n : P_{n-2} - P_{n-1} = P_n : P_{n-1},$$

aus welcher Proportion durch Ausrechnung hervorgeht:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}},$$

d. i. also auch

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} = \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}} \cdot \cdot = \frac{P_1}{P_o}.$$

Schreibt man nun die $n$folgenden Gleichungen unter einander:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n}{P_{n-1}} &= \frac{P_1}{P_o} \\
\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} &= \frac{P_1}{P_o} \\
\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}} &= \frac{P_1}{P_o} \\
\cdot \quad & \quad \cdot \\
\cdot \quad & \quad \cdot \\
\cdot \quad & \quad \cdot \\
\frac{P_2}{P_1} &= \frac{P_1}{P_o} \\
\frac{P_1}{P_o} &= \frac{P_1}{P_o},
\end{aligned}$$

so giebt das Product die gesuchte Auflösung:

$$\text{I.} \quad \frac{P_n}{P_o} = \left(\frac{P_1}{P_o}\right)^n.$$

Da die Drücke in kg auf die Fläche und die Barometerstände proportionale Grössen sind, so gilt diese Gleichung auch, wenn man unter den P Barometerhöhen versteht.

304. Die in Auflösung 302. enthaltenen Werthe führen zunächst zu dem Werthe für 1 m Höhendifferenz:

$$\frac{P_1}{P_o} = 0.999875.$$

Der Druck ergiebt sich für:

Höhe m:	Druck auf 1 □m k:	Luftdruck mm:
200	10078	741
400	9830	723
600	9587	705
800	9351	688
1000	9121	671.

Die Höhe bei den angegebenen Barometerständen ist:

Luftdruck mm:	750	740	730	720	710
Höhe m:	106	214	323	433	545.

Der den in der Aufgabe angegebenen Constanten entsprechende Ausdruck für die aus den Barometerständen zu berechnende Höhe ist:

$$h = 18450\,[log\,B_o - log\,B];$$

er giebt die Höhe in m.

II. Abtheilung.

Wellenlehre und Akustik.

Schwingungen eines Punktes und Wellenbewegung.

1. Nach Zunahme des Winkels $\sqrt{k}.t$ um 2π, demnach von t um $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, ist wieder derselbe Bewegungszustand eingetreten, daher $T=\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$; statt des Winkels $\sqrt{k}.t$ kann man nun $\frac{2\pi t}{T}$ schreiben und findet nun leicht, dass folgende Grössen einander entsprechen:

$t=$	$\frac{4n+1}{4}T$	$\frac{4n+2}{4}T$	$\frac{4n+3}{4}T$	$\frac{4n+4}{4}T$
$y=$	α	0	$-\alpha$	0
$v=$	0	$-\alpha\sqrt{k}$	0	$+\alpha\sqrt{k}$
$\gamma=$	$-\alpha k$	0	$+\alpha k$	$0.$

2. Die Bewegungszustände werden nach Zunahme von $t\sqrt{k-\varepsilon^2}$ um 2π wieder dieselben, so dass $\frac{2\pi}{\sqrt{k-\varepsilon^2}}=T$ zu setzen ist; hierauf erscheint y unter der Form:

$$y=Aq^{\frac{2t}{T}}\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Entsprechend sind nun folgende Zeiten und Ausschläge:

$t=$	$\frac{4n+1}{4}T$	$\frac{4n+2}{4}T$	$\frac{4n+3}{4}T$	$\frac{4n+4}{4}T$
$y=$	$Aq^{\frac{4n+1}{2}}$	0	$-Aq^{\frac{4n+3}{2}}$	$0.$

3. Die Gleichungen für y und v sind, wenn:

$$x = \frac{4n\lambda}{4}, \quad \frac{(4n+1)\lambda}{4}, \quad \frac{(4n+2)\lambda}{4};$$

$$y = \alpha \sin\frac{2\pi t}{T}, \quad -\alpha\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad -\alpha\sin\frac{2\pi t}{T};$$

$$v = \frac{2\pi\alpha}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad \frac{2\pi\alpha}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad -\frac{2\pi\alpha}{T}\cos\frac{2\pi t}{T};$$

$$x = \frac{(4n+3)\lambda}{4}, \quad \frac{4n+4}{4}\lambda, \quad x;$$

$$y = \alpha\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad \alpha\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right);$$

$$v = -\frac{2\pi\alpha}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \frac{2\pi\alpha}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad \frac{2\pi\alpha}{T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right).$$

4. Die Bewegung des in Betrachtung gezogenen Punktes ist durch die Gleichungen bestimmt:

(wegen A) $y = \alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$,

(wegen B) $y' = \alpha'\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x-a}{\lambda}\right] = \alpha'\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{a}{\lambda}\right]$.

Die wirkliche Bewegung wird durch die Gleichung $Y = y + y'$ repräsentirt, welche sich durch die Substitutionen

$$\alpha + \alpha'\cos\frac{2\pi a}{\lambda} = A\cos\frac{2\pi D}{\lambda},$$

$$\alpha'\sin\frac{2\pi a}{\lambda} = A\sin\frac{2\pi D}{\lambda}$$

in die Form bringen lässt:

I. $$Y = A\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{D}{\lambda}\right],$$

wobei in Gemässheit der Substitutionen:

$$A = \sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+2\alpha\alpha'\cos\frac{2\pi a}{\lambda}},$$

$$tg\frac{2\pi D}{\lambda} = \frac{\alpha'\sin\frac{2\pi a}{\lambda}}{\alpha+\alpha'\cos\frac{2\pi a}{\lambda}}$$

ist. Die Gleichung I., welche ihrer Form nach eine mit A und B isochronische Bewegung zeigt, die von einem von A aus in der

Richtung AB um D entfernten Mittelpunkte ausgeht, wird nun in den durch die Aufgabe berührten Fällen $\left(Arc\,tg\frac{\alpha'}{\alpha}=\varphi \text{ gesetzt}\right)$:

für $a=\frac{4n}{4}\lambda$, $\quad y=(\alpha+\alpha^1)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$,

für $a=\frac{4n+1}{4}\lambda$, $\quad y=\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{\varphi}{2\pi}\right)$,

für $a=\frac{4n+2}{4}\lambda$, $\quad y=(\alpha-\alpha')\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$,

für $a=\frac{4n+3}{4}\lambda$, $\quad y=\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)$,

für $a=\frac{4n+4}{4}\lambda$, $\quad y=(\alpha+\alpha')\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$.

5. Der Punkt C erhält von A und B aus resp. die Ablenkungen:

$$y=\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right),$$

$$y'=\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{a-x}{\lambda}\right).$$

Die resultirende Bewegung $Y=y+y'$ wird durch Zusammenziehung nach einer bekannten trigonometrischen Formel:

$$Y=2\alpha\cos\frac{2x-a}{\lambda}\pi\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{a}{2\lambda}\right).$$

Diese Gleichung, welche ganz allgemein für die Entfernung zweier benachbarter Schwingungsknoten $\frac{\lambda}{2}$ giebt, nimmt in den angezogenen Specialfällen die Formen an:

$a=2n\lambda$, $\quad Y=2\alpha\cos\frac{2x}{\lambda}\pi\sin\frac{2\pi t}{T}$,

$a=(2n+\frac{1}{2})\lambda$, $\quad Y=-2\alpha\sin\frac{2x\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}$,

$a=(2n+\frac{2}{2})\lambda$, $\quad Y=+2\alpha\cos\frac{2x\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{T}$,

$a=(2n+\frac{3}{2})\lambda$, $\quad Y=-2\alpha\sin\frac{2x\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}$.

6. Die Zusammenziehung mittelst einer bekannten trigonometrischen Formel giebt:

$$\alpha \sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x-d}{\lambda}\right]+\alpha \sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x+d}{\lambda}\right]$$
$$=2\alpha\cos\frac{2\pi d}{\lambda}.\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right];$$

die Theilbewegungen ersetzen die wirkliche Bewegung unter der Bedingung:

$$\cos\frac{2\pi d}{\lambda}=\tfrac{1}{2},$$

woraus sich (n eine beliebige positive, ganze Zahl) ergiebt:

$$d=n\lambda\pm\tfrac{1}{6}\lambda.$$

7. Die Gleichung der resultirenden Bewegung ist:

$$Y=\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2}\,\sin\frac{2\pi t}{T},$$
$$w=Arc\,tg\,\frac{\alpha'}{\alpha}.$$

8. Der Punkt schwingt in Folge der componirenden Bewegungen nach den Gleichungen:

$$\alpha\cos\varphi\sin\frac{2\pi t}{T}\text{ und }\alpha\sin\varphi\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

9. Der Punkt C erhält gleichzeitig Ablenkungen von A und B, welche resp. die Grösse haben:

$$y=\alpha\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right),\quad z=\beta\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x-a}{\lambda}\right).$$

Elimination von t führt schliesslich auf die Gleichung, welche im Allgemeinen eine Ellipse darstellt:

$$\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}-\frac{2y}{\alpha}\frac{z}{\beta}\cos\frac{2\pi a}{\lambda}=\sin^2\frac{2\pi a}{\lambda}.$$

Ein von der Gleichgewichtslage des Punktes C nach dem Orte, den derselbe zur Zeit t einnimmt, gezogener Radiusvector bildet mit der positiven z-Richtung einen Winkel u, für den:

$$tg\,u=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\cos\frac{2\pi a}{\lambda}+\sin\frac{2\pi a}{\lambda}\,cotg\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)},$$

welcher Ausdruck zur Bestimmung der Bewegungsrichtung in der Bahnellipse brauchbar ist.

Die Specialfragen der Aufgabe werden durch folgende Tabelle beantwortet:

Distanz $a =$	Bahngleichung:	Rotation:
$\frac{1}{8}\lambda$	$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2-\frac{yz}{\alpha\beta}\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	retrograd, d. i. dem Zeiger einer Uhr entgegen;
$\frac{1}{4}\lambda$	$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2=1$	desgleichen;
$\frac{3}{8}\lambda$	$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2+\frac{yz}{\alpha\beta}\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	desgleichen;
$\frac{4}{8}\lambda$	$\frac{y}{\alpha}=-\frac{z}{\beta}$	
$\frac{5}{8}\lambda$	$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2+\frac{yz}{\alpha\beta}\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	direct, d. i. wie der Zeiger einer Uhr;
$\frac{6}{8}\lambda$	$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2=1$	desgleichen;
$\frac{7}{8}\lambda$	$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{z}{\beta}\right)^2-\frac{yz}{\alpha\beta}\sqrt{2}=\frac{1}{2}$	desgleichen.
$\frac{8}{8}\lambda$	$\frac{y}{\alpha}=\frac{z}{\beta}$.	

10. Die berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen beträgt in:

A. Gusseisen 3746 m, Blei 1287 m, Zink 3497 m, Kupfer 3698 m, Eisen 5143 m, Gussstahl 4987 m;

B. Meerwasser 1454 m, Seinewasser 1437 m;

C. atmosphärische Luft von 0^0 und 760 mm = 331.2 m.

11. Die (von den Gebrüdern Weber durch den Versuch $= 43 - 80 - 123$ m gefundene) Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen beträgt nach dem Ergebniss der Rechnung:

1.	2.	3.
43 m	79 m	114 m.

Fortpflanzung des Schalles in der Luft und andern Medien.

12. Aus der Gleichung:

$$t=\frac{x}{c}+\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

erhält man durch Ausrechnung von x:

$$x=ct+\frac{c^2}{g}\pm\sqrt{\frac{c^2}{g}\left(2ct+\frac{c^2}{g}\right)}.$$

Da $x < ct$ sein muss, so kann nur das untere Vorzeichen der Wurzelgrösse genommen werden. Der Ausdruck lässt sich hierauf in die für specielle Berechnung günstigere Form bringen:

$$\text{I. } x = \frac{c^2}{2g}\left[\sqrt{1+\frac{2gt}{c}} - 1\right]^2.$$

Für T findet man:

$$\text{II. } T = \frac{c}{g}\left[\sqrt{1+\frac{2gt}{c}} - 1\right].$$

Folgende beobachtete Zeiten und Schachttiefen entsprechen einander:

Zeit Sekunden:	1.75	3.50	5.25	7.00	8.75
Schachttiefe m:	14	55	118	202	303.

13. Man vernimmt das Echo:

unmittelbar, eine, zwei, drei, vier

Sekunden nach dem Rufen des dreisilbigen Wortes, wenn die Entfernungen von Rufer und Wand betragen:

52.5 227.5 402.5 577.5 752.5 m.

14. Bezeichnet man mit c die Schallgeschwindigkeit, mit v die Schallquelle, mit w des Beobachters Geschwindigkeit, mit i das wirkliche Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anschlägen, mit z das gesuchte scheinbare Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anschlägen, so ist:

bei der Bewegung von Beobachter und Schallquelle gegeneinander:

$$z = \frac{c - v - w}{c} i;$$

bei der Bewegung von Schallquelle und Beobachter voneinander:

$$z = \frac{c + v + w}{c} i.$$

Hiernach beträgt das Intervall:

A. u. B. Bei Annäherung oder Entfernung von Beobachter und Schallquelle mit der relativen Geschwindigkeit:

m:	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
Intervall bei Näherung Sekunden:	0.099	0.098	0.097	0.096	0.095
Intervall bei Entfernung Sekunden:	0.101	0.102	0.103	0.104	0.105.

C. Bei Annäherung oder Entfernung von Beobachter und Schallquelle mit der relativen Geschwindigkeit:

m:	7	14	21	28	35
Intervall bei Näherung Sekunden:	0.098	0.096	0.094	0.092	0.090
Intervall bei Entfernung Sekunden:	0.102	0.104	0.106	0.108	0.110.

15. Das Intervall muss betragen bei Röhren von:

	Blei	Zinn	Zink	Eisen
Secunden:	1.53	1.73	1.82	1.87.

Tönende Wellen in der Luft.

16. Folgende Töne und Wellenlängen entsprechen einander:

Ton:	C_1	C	c	c_1
Wellenlänge in mm ($v = 350$ m):	10825	5413	2706	1353
Wellenlänge in mm ($v = 340$ m):	10516	5258	2629	1315.
Ton:	c_2	c_3	c_4	c_5
Wellenlänge in mm ($v = 350$ m):	677	338	169	85
Wellenlänge in mm ($v = 340$ m):	657	329	164	82.

17. Die Schwingungszahlen der gleichtemperirten Töne sind:

$c = 1.0000$	$cis = 1.0595$	$d = 1.1225$	
$dis = 1.1892$	$e = 1.2599$	$f = 1.3348$	
$fis = 1.4142$	$g = 1.4983$	$gis = 1.5874$	
$a = 1.6818$	$ais = 1.7818$	$h = 1.8878$	$c_1 = 2$,

oder $\sqrt[12]{2^1}$, $\sqrt[12]{2^2}$ etc.

Schwingungszahlen der Anfangstöne der Octaven:

C_1	C	c	c_1
32.33	64.66	129.33	258.65
c_2	c_3	c_4	c_5
517.31	1034.61	2069.22	4138.44.

Da die Töne von den in der Aufgabe gegebenen Wellenlängen resp. 3400, 340, 170, 68, 34 Schwingungen pro Sekunde machen, so findet sich mit Hülfe voriger Tabelle leicht die Octave, in die

sie gehören, sowie das Verhältniss der Schwingungsmengen zum Anfangs-c ihrer Octave, und hierauf durch Vergleich mit der Tabelle zu Eingang der Auflösung der Ton. Folgende Wellenlängen und Töne correspondiren:

Wellenlänge:	0.1 m	1 m	2 m	5 m	10 m
Ton:	a_4-	f_1-	$f-$	$Cis-$	Cis_1-.

18. Die Wellenlänge der Töne in der Luft ist:
4173 bis 329 mm.

19 (40). Die Schwingungsmengen der fraglichen Töne stehen in dem Verhältnisse:

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9:10,$$

und diesen Verhältnissen entsprechen ganz oder angenähert die Töne:

$$C \quad c \quad g \quad c_1 \quad e_1 \quad g_1 \quad ais_1 \quad c_2 \quad d_2 \quad e_2.$$

Klänge durch Schwingungen fester, flüssiger und luftförmiger Körper.

20. A. Bei gleichen Grundtönen und zwei Metallen, bei denen l, E, s, sowie l', E', s' zusammengehören, gilt, wie man leicht findet, das Verhältniss: $l^2 : l^1 = \frac{E}{s} : \frac{E'}{s'}$; hieraus ergiebt sich folgende Länge der Stäbe für gleichen Grundton:

	Eisen	Gussstahl	Kupfer	Silber	Zink
Stablänge mm:	1000	960	668	504	643.

B. Die ersten fünf Töne sind bei einem:

einseitig eingeklemmten Stabe:	c	g_1	e_2	b_2	d_3
beiderseits festen oder freien Stabe:	c_1	c_2	g_2	c_3	e_3.

21. Mit Hülfe der in Aufl. 17. gegebenen Tabelle findet man leicht die Tonreihe des cylindrischen Stabes, wie folgt:

ein Ende fest, das andere frei:	C_1	$gis-$	d_2-	cis_3+	b_3-
beide Enden fest oder frei:	$gis+$	d_2-	cis_3+	b_3-	f_4-
ein Ende aufgelegt, das andere ganz fest oder ganz frei:	$d-$	b_1-	h_2-	gis_3-	dis_4+
beide Enden aufgelegt:	$Fis-$	fis_1-	gis_2-	fis_3-	d_4-.

22. Nach Ermittelung der Geschwindigkeiten c und der Schwingungsmengen werden die Töne leicht mit Hülfe der Tabellen in Auflösung 17. erhalten; eine Zusammenstellung aller Resultate ist im Folgenden gegeben.

Eiserne Saite.

	Durchmesser = 0.1 mm	0.2 mm	0.3 mm	0.4 mm	0.5 mm
Geschwindigkeit c in m:	403	201	134	101	81
Schwingungszahl:	201	101	67	50	40
Ton:	*gis* —	*Gis* —	*Cis* —	Gis_1 —	E_1 —.

Messingsaite.

Geschwindigkeit c in m:	383	192	128	96	77
Schwingungszahl:	192	96	64	48	38
Ton:	*g* —	*G* —	*C* —	G_1 —	Dis_1 —.

23. Die Wassersäule macht pro Sekunde 582 Schwingungen.

24. Die Schwingungsmengen der fünf ersten Töne der Tonreihe betragen:

gedeckte Pfeife:	100	300	500	700	900
offene Pfeife:	200	400	600	800	1000.

25. Der Grundton der gedeckten Pfeife erreicht ohne Correction 100 (*Gis* —), mit Correction 95.5 (*G* —) Schwingungen; für den Grundton der offenen Pfeife findet man ohne Correction 200 (*gis* —), mit Correction 186.8 (*fis* +) Schwingungen.

26 ([26–29]). Die Töne stimmen am meisten mit folgenden:

Kohlensäure	ölbildendes Gas	Sauerstoff	Kohlenoxydgas	Wasserstoff
Gis	*H*	*H*	*c*	h_1.

27. Ist t die Schwingungsdauer des Tones von Röhre und Stab, so ist:

$$c = \frac{2\,l}{t}, \qquad x = \frac{2\,h}{t}, \qquad C = \frac{2\,L}{t},$$

woraus

$$C = c\,\frac{L}{l} \text{ und } x = c\,\frac{h}{l}$$

hervorgeht.

28. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

primäre Töne:	$c_1\ d_1$	$c_2\ e_2$	$c_2\ a_2$	$h_1\ d_3$	$h_1\ e_2$
	8 : 9	4 : 5	3 : 5	5 : 12	3 : 4
erster Diff.-Ton:	C_1	c	f_1 —	f_1 —	e
	1	1	2	7	1
zweiter Diff.-Ton:	*ais* —	g_1 +	*f* —	*g* +	e_1
	7	3	1	2	2
Summationston:	cis_2 +	d_3 +	f_3 —	gis_3 +	d_3 —
	17	9	8	17	7.

29 (48). Den Tönen ais_2 — und g_1 +
896 384.

30 (49 50). Es entsprechen einander:

primäre Töne:	Combinationstöne erster Ordnung:	Stösse:
220, 277, 329	57, 109, 52	5
200, 252, 300	52, 100, 48	4.

31 (51). Die umgekehrte Proportionalität der Schwingungsmengen und Saitenlängen führt zu dem Werthe:

$$x = 443.56.$$

32 (52). Weil die Saite l_1 entweder 442 oder 438 Schwingungen machen soll, muss entweder

$$l_1 = 0.9955\, l \text{ oder } l_1 = 1.0046\, l$$

sein.

III. Abtheilung.

Optik.

1. Die Schattenlängen des Stabes sind:

	Südgrenze v. Deutschland	Mittel-deutschland	Nordgrenze v. Deutschland	Aequator
bei kleinster Mittagsonnenhöhe:	4681 mm	6310 mm	9442 mm	761 mm
bei grösster Mittagssonnenhöhe:	725 mm	911 mm	1115 mm	—.

2. Die Schattenlänge des Baumes beträgt:

Sonnenhöhe Grad:	10	15	20	25	30
Schattenlänge m:	113.4	74.6	54.9	42.9	34.6.

3. Die Höhe des Baumes beträgt bei jedem der genannten fünf Beispiele: 20 m.

4. Schattenlänge:	0.7 m	0.9 m	1.0 m	1.6 m
Sonnenhöhe Grad:	55	48	45	32.

5. Die Entfernungen: d der Kernschattenspitze von der Mitte der dunkeln Kugel und l von der Mitte der leuchtenden Kugel sind:

d in cm:	10	10	9.9	$e\frac{r}{R-r}$,
l in cm:	110	110	1009.9	$e\frac{R}{R-r}$.

6. A. Von der nächsten Mauerfläche steht ab:

die Kernschattenkante um $h\,cotg\left(\beta+\frac{\Delta}{2}\right)=h\left[cot\,\beta-\frac{\Delta}{2\,sin^2\beta}\right]$,

die Halbschattenkante um $h\,cotg\left(\beta-\frac{\Delta}{2}\right)=h\left[cot\,\beta+\frac{\Delta}{2\,sin^2\beta}\right]$.

Die Entfernung beider Kanten ist gleich der Differenz beider Ausdrücke:

$$\frac{h\,\triangle}{\sin^2\beta}.$$

B. Der Abstand beider Schattenkanten ist bei der Sonnenhöhe von:

Grad:	20	30	40	50	60
Abstand in m:	0.797	0.373	0.226	0.159	0.124.

7 (3–5). Ausser der in allen Beispielen gleichen Abscisse $x = -10$ m, sind die übrigen Coordinaten in m:

1	2	3	4	5
$y = -20$	$+10$	-5	$+2.5$	$+3\frac{1}{3}$,
$z = -5$	-0.5	-2.5	$+1.25$	$-1\frac{2}{3}$.

8. Folgende Erhebungen des leuchtenden Punktes über die Horizontalebene und Helligkeiten der Fläche f entsprechen einander:

o	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$
o	358	385	354	272	217.

9 (22). Bei senkrechter Einstrahlung und bei der Entfernung 1 bringe der leuchtende Punkt auf der Fläche f die Helligkeit 1 hervor. Wenn seine Höhe über der Horizontalebene x ist und seine Horizontalprojection die Entfernung a von der Fläche besitzt, so erhält die Fläche f die Lichtmenge:

$$J = \frac{f\,x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Eine Vermehrung von x um $\triangle x$ bewirkt eine Zunahme $\triangle J$ von J, welche beträgt (Vernachlässigung höherer Potenzen von $\triangle x$):

$$\triangle J = f \triangle x\, \frac{a^2 - 2x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Die Zunahme $\triangle x$ bedingt nur dann keine weitere Zu- oder Abnahme von J, wenn $a^2 = 2x^2$ ist, also für $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, was hier nur einem Maximum der Beleuchtung entsprechen kann. (Gang von J in der Nähe von $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, s. a. Aufl. 8.)

10. Das vor dem Schirm dem kleinen Stearinfleck gegenübergestellte Auge erhält von der Flächeneinheit folgende Lichtmengen:

A.

Entfernung des vorderen Lichtes dcm:	Lichtmenge vom ungetränkten Papier:	Lichtmenge vom Stearinfleck:
2	99.25	92.50
3	44.25	42.50
4	25.00	25.00
5	16.09	16.90
6	11.25	12.50

B.

2	99.25	62.50
3	44.25	34.72
4	25.00	25.00
5	16.09	20.50
6	11.25	18.06.

C. Der allgemeine Ausdruck für die von der Flächeneinheit $= 1\,q$ dcm nach dem Auge des Beobachters vor dem Schirme ausgestrahlten Lichtmengen, ist:

beim ungetränkten Papier: $\frac{J}{D^2}+\left[\frac{J_1}{D_1^2}-\frac{J}{D^2}\right]d,$

beim getränkten Papier: $\frac{J}{D^2}+\left[\frac{J_1}{D_1^2}-\frac{J}{D^2}\right]\delta.$

11. Im Allgemeinen ist die Helligkeit des Schattens:

S S_1 S_2

$\frac{J_1}{D_1^2}+\frac{J_2}{D_2^2}$ $\frac{J}{D^2}+\frac{J_2}{D_2^2}$. $\frac{J}{D_2}+\frac{J_1}{D_1^2}$.

Gleiche Helligkeit tritt bei dem Verhältniss:

$$J : J_1 : J_2 = D^2 : D_1^2 : D_2^2$$

ein.

Spiegelung des Lichtes.

12 (23). Je nach der angenommenen Horizontaldistanz vom Beobachter und Wasserspiegel beträgt die Höhe des Felsens:

Horizontaldistanz m	100	200	300	400	500
Felsenhöhe m	56	114	172	229	287.

13. A. Drehung des Spiegels von dem leuchtenden Punkte hinweg um die sehr kleinen Winkel:

$1''$ $1'$ 1^0 α,

bringt Bildsenkungen von der Grösse:

$\frac{97}{10^7} d$ $\frac{5818}{10^7} d$ $\frac{349066}{10^7} d$ $2 d \alpha$

hervor.

B. Die Drehung um die nämlichen Winkelwerthe nach entgegengesetzter Richtung bringt eine Hebung des Bildes hervor, die der oben angegebenen Senkung an Grösse gleich ist.

C. Der genaue Ausdruck für die Senkung, resp. Hebung des Bildes, wenn der Spiegel vom leuchtenden Punkte hinweg oder nach ihm hin um den sehr kleinen Winkel α gedreht wird, wird leicht trigonometrisch gefunden und ist resp.:

$$2 d \sin \alpha \cos \alpha \pm 2 h \sin^2 \alpha.$$

Die Näherungswerthe $\sin \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha = 1$ führen zum gemeinschaftlichen Ausdrucke:

$$2 d \alpha$$

für Senkung und Hebung des Bildes. Mit Hülfe desselben findet man leicht, dass eine Höhenveränderung des Bildes von 1 m bei Drehung um:

1^0 $1'$ $1''$

bei den Werthen:

$d = 29$ 1719 10313 m

eintreten würde.

14. A. Genau ist der Scalentheil, der der Spiegeldrehung α entspricht, $x = d \, tg \, 2\alpha$ und die Bildentfernung vom Auge $\frac{d \, tg \, 2\alpha}{tg \, \alpha}$; Vertauschung von Tangente und Bogen giebt die Näherungsausdrücke für $x = 2 d \alpha$ und für die Bildentfernung $2d$.

B. Bei der Spiegeldrehung um 1 Grad entsprechen einander:

Entfernung von Spiegel und Scala in m:	1	2	3	4	5
Scalentheil in mm:	34.9	69.8	104.8	139.7	174.6;

bei der Spiegeldrehung um 1 Minute entsprechen einander:

Entfernung von Spiegel und Scala in m:	1	2	3	4	5
Scalentheil in mm:	0.6	1.2	1.7	2.3	2.9.

C. Die Spiegeldrehung um 5 Grad bringt folgende Scalentheile zu Gesicht:

Entfernung von Spiegel und Scala in m:	1	2	3	4	5
Scalentheil in mm:	176	353	529	705	882.

15 (25). Man findet durch einfache geometrische Construction, dass die Spiegelhöhe für die Beobachtung des hinter dem Beobachter befindlichen Gegenstandes

$$\frac{dH}{D+2d},$$

des Beobachters selbst

$$\frac{a}{2}$$

sein muss.

16 (26). A. Für Einfalls- und Spiegelungswinkel gelten die Ausdrücke:

$$tg\gamma = \frac{(a-2p)\sin\beta}{2p+(a-2p)\cos\beta}; \qquad tg\gamma = \frac{(2p-\alpha)\sin\beta}{2p-(2p-\alpha)\cos\beta}.$$

Gleichsetzung beider ergiebt nach einigen Umrechnungen den genauen Ausdruck:

$$\alpha = p\frac{2(a-2p)\cos\beta+4p-a}{(a-2p)\cos\beta+p} = 2p - \frac{p(a-2p)}{(a-2p)\cos\beta+p},$$

und den Näherungswerth:

$$\alpha = \frac{ap}{a-p} - \frac{p}{2}\left(\frac{a-2p}{a-p}\right)^2\beta^2 = \frac{ap}{a-p} - \frac{p}{2}\left[1-\frac{p}{a-p}\right]^2\beta^2.$$

B. Setzt man $a=\infty$, so ergeben sich die verlangten Ausdrücke ohne Weiteres, nämlich:

$$\text{genau: } \alpha = 2p - \frac{p}{\cos\beta}; \text{ genähert: } \alpha = p - \frac{p}{2}\beta^2.$$

17. A. Der genaue Ausdruck für α unter 16 B gilt direct für Randstrahlen; für Centralstrahlen geht er in $\alpha = p$ über; man findet hieraus leicht:

$$\text{Längenabweichung: } p\left(\frac{1}{\cos\beta}-1\right) \text{ und}$$

$$\text{Seitenabweichung: } p\left(\frac{1}{\cos\beta}-1\right)tg2\beta,$$

wobei β die halbe Apertur bedeutet.

Die Einsetzung der Zahlenwerthe führt hierauf zu folgender, die Beantwortung der Fragen enthaltenden Tabelle:

ganze Apertur Grad:	10	20	30	40	50	60
Längenabweichung:	$0.0038p$	$0.0154p$	$0.0353p$	$0.0642p$	$0.1034p$	$0.1547p$
Seitenabweichung:	$0.0007p$	$0.0056p$	$0.0204p$	$0.0539p$	$0.1232p$	$0.2680p$.

B. Die unter A. angegebenen genauen Ausdrücke werden durch Einführung der Näherungswerthe für die trigonometrischen Functionen:

$$\text{Längenabweichung: } p\frac{\beta^2}{2}; \quad \text{Seitenabweichung: } p\beta^3.$$

18 ([29, 30]). Die Bestimmung der gesuchten Grössen erfolgt allgemein aus folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}; \quad a-\alpha=d,$$

und führt zu den Werthen:

$$a=(p+\tfrac{1}{2}d)\pm\sqrt{p^2+\tfrac{1}{4}d^2}, \qquad a=\begin{matrix}17.071\\2.929\end{matrix}\text{ dcm};$$

$$\alpha=(p-\tfrac{1}{2}d)\pm\sqrt{p^2+\tfrac{1}{4}d^2}, \qquad \alpha=\begin{matrix}7.071\\-7.071\end{matrix}\text{ dcm},$$

wobei in beiden Buchstabenausdrücken die gleichen Vorzeichen einander entsprechen.

19. A. Die bekannten Gleichungen:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p}; \quad a:b=\alpha:-\beta,$$

a Gegenstandsentfernung vom optischen Mittelpunkt,
α Bildentfernung " " "
b Gegenstandshöhe,
β Bildhöhe

führen durch $-\beta=\frac{b}{n}$ zu den Ausdrücken:

$$a=(n+1)p; \qquad \alpha=\frac{n+1}{n}p.$$

B. Folgende Verkleinerungen der Gegenstandshöhe bei der Abbildung und Entfernungen des Gegenstandes vom optischen Mittelpunkt gehören zusammen:

Verkleinerung:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
Gegenstandsentfernung dcm:	30	40	50	60	70
Verkleinerung:	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
Gegenstandsentfernung dcm:	80	90	100	110.	

20. Für Einfalls- und Spiegelungswinkel gelten die Beziehungen:

$$tg\gamma = \frac{(2p+a)\sin\beta}{(2p+a)\cos\beta - 2p}; \quad tg\gamma = \frac{(2p-\alpha)\sin\beta}{2p-(2p-\alpha)\cos\beta}.$$

Die Verbindung beider Ausdrücke führt zu dem genauen Ausdrucke:

$$\alpha = \frac{4p^2 + ap - 4p^2\cos\beta - 2ap\cos\beta}{p - a\cos\beta - 2p\cos\beta} = 2p - \frac{p(2p+a)}{(2p+a)\cos\beta - p},$$

aus welchem sich ferner der Näherungswerth ergiebt:

$$\alpha = \frac{ap}{a+p} - \frac{p}{2}\left(\frac{a+2p}{a+p}\right)^2 \cdot \beta^2 = \frac{ap}{a+p} - \frac{p}{2}\left[1 + \frac{p}{a+p}\right]^2 \cdot \beta^2.$$

B. Die eben gegebenen Ausdrücke gehen durch $a = \infty$ über in:

$$\alpha = 2p - \frac{p}{\cos\beta}; \quad \text{Näherungswerth: } p - \frac{p\beta^2}{2}.$$

C. Die genauen und Näherungswerthe für die Längen- und Seitenabweichung sind:

$$\text{Längenabweichung: } \left(\frac{p}{\cos\beta} - p\right); \qquad \text{angenähert: } p\frac{\beta^2}{2},$$

$$\text{Seitenabweichung: } \left(\frac{p}{\cos\beta} - p\right) tg\,2\beta; \quad \text{angenähert: } p\beta^3.$$

D. Da dem Winkel von $5^0\ 43\frac{3}{4}'$ der Bogen 0.1 entspricht, so ist:

$$\text{die Längenabweichung} = 0.005\,p,$$
$$\text{„ Seitenabweichung} = 0.001\,p.$$

21. Ist der Einschiebespiegel concav, so gelten direct die Formeln (s. 19 A. der Auflösungen):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p}; \quad a : b = \alpha : -\beta.$$

Da diese Formeln so eingerichtet sind, dass a positiv gerechnet wird, wenn der Gegenstand vor der spiegelnden Fläche steht, negativ, wenn der Gegenstand ein Luftbild ist, welches hinter dem

Spiegel stehen würde, wenn es überhaupt zur Existenz käme, so ist $a = -2p$ zu setzen, und man findet hierauf leicht:

$$\alpha = \tfrac{2}{3}p \text{ und Bildhöhe } \beta = +\frac{b}{3} \text{ (aufrecht).}$$

Bei convexem Einschiebespiegel gilt für letzteren:

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} = \frac{1}{p}; \quad a : b = \alpha : \beta.$$

Da diese Formel ähnlich gestellt ist, wie die bei Concavspiegeln (s. o.), so ist auch hier $a = -2p$ zu setzen, wodurch man erhält: $\alpha = 2p$ und Bildhöhe $\beta = -b$ (verkehrt).

22. Nennt man b den Abstand der optischen Bilder an der Entstehungsstelle, so führen folgende Gleichungen zur Kenntniss vom Radius r der Spiegel:

beim Concavspiegel:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{r}; \quad A : \alpha = \frac{L}{2} : \frac{b}{2}; \quad b = \frac{l(A-\alpha)}{A};$$

beim Convexspiegel:

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{A} = \frac{2}{r}; \quad A : \alpha = \frac{L}{2} : \frac{b}{2}; \quad b = \frac{l(A+\alpha)}{A}.$$

Diese Bestimmungsgleichungen ergeben:

$$\text{beim Concavspiegel: } r = \frac{2Al}{L+2l};$$

$$\text{beim Convexspiegel: } r = \frac{2Al}{L-2l}.$$

Brechung homogenen Lichtes beim Uebergang aus einem Mittel ins andere durch ebene Grenzflächen.

23. Die gesuchten Winkel sind den Grenzwinkeln der Substanzen gleich und betragen bei:

Wasser	Terpentinöl	Schwefelkohlenstoff
48°35.4′	41°48.6′	37°58.8′.

24. Vom leuchtenden Punkte mögen zwei Strahlen nach der Oberfläche der Flüssigkeit gehen, deren Brechungsindex zunächst n sei:

a) ein Strahl, der die Oberfläche rechtwinklig durchdringt;

b) ein Strahl, der mit dem vorigen den sehr kleinen Winkel α bildet.

Der zu letzterem gehörige gebrochene Strahl schneidet den unter a) angenähert in der Entfernung $\frac{h}{n}$ von der Oberfläche, daher beträgt die Hebung bei den Beispielen:

	Wasser	Terpentinöl	Schwefelkohlenstoff
Hebung:	$\frac{1}{4}h$	$\frac{1}{3}h$	$\frac{5}{13}h$.

25. a) Ein vom leuchtenden Punkt rechtwinklig auf die Glasplatte gezogener Strahl werde als Axe eines Strahlenbündels angesehen. Ein vom leuchtenden Punkte ausgehender Strahl, welcher mit der Axe den sehr kleinen Winkel α bildet, tritt in die untere Fläche der Glasplatte angenähert in der Entfernung von der Axe $h\alpha$ ein und in der Entfernung von der Axe $h\alpha + \frac{d\alpha}{n}$ wieder aus, und schneidet demgemäss die Axe in der Entfernung $d\frac{n-1}{n}$ von der Horizontalebene des leuchtenden Punktes.

b) Die Hebung durch eine 10 mm dicke Glasplatte $n = \frac{3}{2}$ würde $3\frac{1}{3}$ mm betragen.

c) Bei Bestimmung des Brechungsindex n wird man die Gleichung benutzen:

$$n = \frac{d}{d-v}.$$

26. Man findet durch Division der betreffenden gegebenen Brechungsindices folgende Werthe:

Brechungsindex von:

Luft	in Glas:	1.5295,
„	„ Wasser:	1.3356,
Wasser	„ Glas:	1.145.

27. Die Verschiebung v ist:

$$\text{genau:} \quad v = d \sin\alpha \left[1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right];$$

$$\text{angenähert:} \quad v = d \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \alpha.$$

28 ([42-44]). Den brechenden Winkeln (ε) entsprechen die nachverzeichneten Eintrittswinkel (α), Austrittswinkel (δ) und Gesammtablenkungen (ω):

$\varepsilon = 36^0\,38.9'$	60^0	30^0	40^0
$\alpha = 10^0$	45^0	10^0	20^0
$\delta = 48^0\,35.4'$	$52^0\,22.9'$	$36^0\,28.9'$	$42^0\,35.6'$
$\omega = 21^0\,56.5'$	$37^0\,22.9'$	$16^0\,28.9'$	$22^0\,35.6'$.

29. Da $\alpha = 0$ ist, wird der Ausdruck für w:

$$w = Arc\,sin\,n\,sin\,\varepsilon - \varepsilon,$$

und die Gleichung zur Berechnung von n:

$$n = \frac{sin(w+\varepsilon)}{sin\,\varepsilon}.$$

30. a) Da mit dem Minimum der Gesammtablenkung Gleichheit von Eintritts- und Austrittswinkeln verbunden ist, ergiebt sich:

$$sin\,\alpha = sin\,\delta = n\,sin\tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad w = 2\,Arc\,sin\,n\,sin\tfrac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon;$$

b) ([45]). Eintrittswinkel und Gesammtablenkung sind:

$$\alpha = 22^0\,50.7', \quad w = 15^0\,41.3';$$

c) die Gleichungen unter a) führen leicht zu folgendem Ausdruck:

$$n = \frac{sin\,\frac{w+\varepsilon}{2}}{sin\,\frac{\varepsilon}{2}};$$

d) die Gleichung unter c) führt zu folgenden Werthen für die Brechungsindices n:

([46])	([47])	([48])
Flintglas, rothes Licht:	Crownglas, violettes Licht:	Crownglas, rothes Licht:
$n = 1.701$	1.63	1.6.

31 ([49, 50]). Die Gesammtablenkung des unter 45^0 eintretenden Strahles nach der totalen Reflexion an der zweiten Fläche ist:

$$w = 45 + \beta = 73^0\,7.5'.$$

Der brechende Winkel muss, um jede Brechung an der zweiten Fläche auszuschliessen, gleich dem doppelten Grenzwinkel, also $83^0\,37.2'$ sein.

Brechung homogenen Lichtes beim Uebergange aus einem Mittel ins andere durch eine sphärische Fläche.

32. Die Ausdrücke für die erste Hauptbrennweite (A) und die zweite Hauptbrennweite (F) sind im Allgemeinen:

$$A = \frac{r}{n-1}; \quad F = \frac{rn}{n-1},$$

demnach ist:

bei der convexen Fläche $A = 40$ cm, $F = 60$ cm, und die der Entfernung $a = 160$ cm conjugirte Brennweite $f = 80$ cm;

bei der concaven Fläche $A = -40$ cm, $F = -60$ cm, und die der Entfernung $a = 160$ cm conjugirte Brennweite $f = -48$ cm.

33. Erste Hauptbrennweite: $A = 30$ cm,
zweite Hauptbrennweite: $F = 20$ cm,
conjugirte Brennweite zu $a = 6$ cm: $f = -5$ cm,
d. h. die Strahlen scheinen von einem im Glase liegenden Punkte zu kommen, welcher 5 cm vom Scheitel entfernt auf der Axe liegt.

Durchgang des Lichtes durch Linsen und Abbildung von Gegenständen durch dieselben.

34. Mit Bezugnahme auf die Definitionen vor den Aufgaben im ersten Theile enthält folgende Tabelle die Auflösungen:

Linse:	h_1 in cm:	h_2 in cm:	$A =$ $F =$	$k_1 =$ $k_2 =$
biconvex	−0,31	−0.37	11,08	0
planconvex	0	−0.67	50.00	0
convexconcav	+0.67	−1,35	−121.35	0
planconcav	0	−0.67	− 60.00	0
biconcav	−0.33	−0.33	− 29.83	0.

35. Jeder Hauptpunkt liegt innerhalb des Glases um 3.39 cm vom nächsten Scheitel entfernt; $A = F = 101.69$ cm.

Bezieht man die Gegenstandsweite a auf den ersten Hauptpunkt, die Bildweite α auf den zweiten Hauptpunkt, bedeutet b die Gegenstands- und β die Bildhöhe, so führen hierauf die Gleichungen:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{F}; \quad a : \alpha = b : -\beta$$

zu folgender, die Resultate enthaltenden Tabelle:

für $a =$ 203.39 cm $= 2F$ ist $\alpha = 203.39$ cm $= 2F$ und $-\beta = 10$ cm;

„ $a = 1016.97$ cm $= 10F$ „ $\alpha = 112.99$ cm $= \frac{10}{9}F$ und $-\beta = 1.11$ cm.

36. Die am Eingange der vorigen Auflösung angezogenen Gleichungen gelten hier direct für von der Linse aus gemessene

Entfernungen und ergeben bei der Entfernung a des abzubildenden Gegenstandes und der Höhe b desselben:

die Entfernung des Schirmes von der Linse: $\alpha = \frac{aF}{a-F}$;

die Bildhöhe: $-\beta = \frac{bF}{a-F}$.

Ein Quadrat vom Inhalt b^2 hat demnach ein Bild vom Inhalt $\frac{b^2F^2}{(a-F)^2}$, wofür sich auch eine bequeme Näherungsformel aufstellen lässt, die leicht zu folgender Tabelle führt:

Linsenbrennweite:	1	2	3	4	5 m
Bildfläche:	1.00	4.02	9.05	16.13	25.25 □ mm.

37. Wird ein Gegenstand von der Länge b in eine solche Entfernung a von der Loupe gebracht, dass das vergrösserte Bild in der deutlichen Sehweite w zur Entstehung kommt, so gelten die Beziehungen:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{w} = \frac{1}{F};$$

$$\frac{\beta}{w} = \frac{b}{a}.$$

Die Sehwinkel bei der Betrachtung mit freiem und bewaffnetem Auge sind daher resp.:

$$\frac{b}{w} \text{ und } \frac{b}{w} \cdot \frac{w+F}{F},$$

daher die Vergrösserung

$$\frac{w}{F} + 1.$$

Die Loupe von 5 cm Brennweite gewährt demnach für:

die Sehweite:	10	20	25	30	40 cm
die Vergrösserung:	3	5	6	7	9.

38 (69). Das Bild bewegt sich während der Verschiebung des leuchtenden Punktes innerhalb einer Strecke von 30 cm Länge.

39. Die Brennweiten der Linsen sind resp.:

$F = 20$ cm 50 cm 75 cm $\frac{a\alpha}{a+\alpha}$.

40. Die Brennweiten der Linsen sind resp.:

$F = 90$ cm 75 cm 20 cm $\frac{a\beta}{b+\beta}$.

41. Die Combinationen haben folgende Brennweiten:

1.	2.	3.
(convex)	(convex)	(convex)
5 cm	$6\frac{2}{3}$ cm	$3\frac{1}{3}$ cm,
4.	5.	6.
(plan)	(concav)	(concav)
∞	-10 cm	-20 cm.

42. Brennweiten der Concavlinsen:

20 cm 25 cm 30 cm.

43. Die äussersten Randstrahlen der Sonne scheinen vor der Brechung aus einem Punkte der Axe zu kommen, welcher die Distanz $\frac{1}{2} d \cot g \sigma$ von der Linse hat; nach der Brechung aber aus einem Punkte der Axe zu kommen, welcher die Entfernung $\frac{F d}{d + 2 F tg \sigma}$ von der Linse hat. Hieraus berechnet man dann ohne weitere Mühe:

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{A} - \frac{0.0094}{d}.$$

Gang homogener Lichtstrahlen in einer aus mehreren brechenden Medien zusammengesetzten Substanz.

44. Folgende bekannte Gleichungen führen zum Resultate:

I. $f = \frac{a F}{a - A}$; II. $-y = \frac{A Y}{a - A}$, wobei:

a der Abstand der Geraden vom 1. Hauptpunkte,
f der Abstand des Bildes vom 2. Hauptpunkte,
Y die Gegenstandshöhe,
y die Bildhöhe.

Resultat.

	1.	2.	3.	4.	5.
Das Bild liegt hinter der Netzhaut mm:	0	0	0.1	0.3	1.3
Grösse des Bildes mm:	0	0	-1.5	-0.1	-0.6.

45. Beim ersten System erhält man durch Einsetzung der betreffenden Werthe für die auf den Scheitel der Grenzfläche bezogenen Entfernungen ohne Weiteres in mm:

$$f_1 = \frac{6000 a}{a - 4000}; \qquad -y_1 = \frac{4000}{a - 4000} Y.$$

Bei nochmaliger Anwendung der Fundamentalformeln auf den Uebertritt des Lichtes an der zweiten Fläche der ersten Schale ist zu setzen:

für den Brechungsindex: $\frac{1}{1}\frac{3}{2}$;

für r: $+1995$ mm;

für a: $$-\left[\frac{6000\,a}{a-4000}-5\right]=\frac{-5995\,a-20000}{a-4000};$$

für y: $$\frac{-4000}{a-4000}\,Y.$$

Man erhält hierauf für den Abstand f_2 des Bildes im zweiten System von der zweiten Glasfläche und für y_2:

$$f_2=\frac{5193.93\,a+17327.54}{a-3198.26};\qquad y_2=\frac{-3198.93}{a-3198.26}\,Y.$$

Bei fortgesetzter Anwendung der Fundamentalformeln erhält man (die f beziehen sich immer auf die brechende Fläche, aus der das gebrochene Licht zuletzt austritt):

drittes System:

$$f_3=\frac{3897.87\,a+384125.3}{a-2661.49};\qquad y_3=\frac{-2678.09}{a-2661.49}\,Y;$$

viertes System:

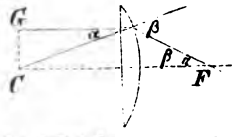
$$f_4=\frac{1574.01\,a+160694.3}{a-1574.01};\qquad y_4=\frac{-1624.26}{a-1574.01}\,Y.$$

Die Discussion der zunächst für die f und y erhaltenen Ausdrücke führt nun schliesslich zu folgenden Tabellen, die die Lösung der sechs Hauptfragen enthalten:

	Entfernungen der Hauptpunkte von den Scheiteln in mm:		Von den entsprechenden Hauptpunkten an gerechnet erste, zweite Hauptbrennweite in mm:		Knotenpunktsentfernungen in mm:	
	$h_1=$	$h_2=$	$A=$	$F=$	$k_1=$	$k_2=$
erstes System:	0.0	0.0	4000.0	6000.0	−2000.0	+2000.0
zweites System:	−0.7	−4.3	3198.9	5198.3	−1999.3	+1999.3
drittes System:	−16.6	−119.3	2678.1	4017.1	−1339.1	+1339.1
viertes System (Linse):	−50.2	−50.2	1624.3	1624.3	0.0	0.0.

Sphärische Abweichung bei der Brechung homogener Lichtstrahlen.

Fig. 2.



46 (54, 55). Nebenstehende Figur, als Durchschnitt einer durch Strahl und Axe gelegten Ebene mit der planconvexen Linse ohne Weiteres verständlich, führt ohne Mühe zu folgendem genauen Ausdrucke für CF, die Mittelpunktsentfernung des Brennpunktes der Randstrahlen:

$$CF = \frac{r \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{n\,r}{n\cos\alpha - \sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}} = \frac{n\,r^2}{n\sqrt{r^2-b^2} - \sqrt{r^2-n^2\,b^2}}.$$

Aus vorstehendem Ausdrucke ergeben sich folgende angenäherte Ausdrücke:

Centraldistanz der Randstrahlen: $\dfrac{2\,n\,r^3}{2\,(n-1)\,r^2 + n\,(n-1)\,b^2}$;

„ „ Centralstrahlen: $\dfrac{n\,r}{n-1}$,

und für die Convexlinse:

Längenabweichung: $= \dfrac{n^2}{2\,(n-1)} \cdot \dfrac{b^2}{r}$;

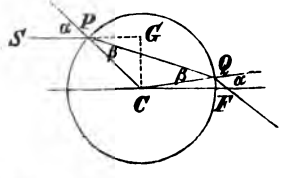
Seitenabweichung: $= \dfrac{n^2}{2} \dfrac{b^3}{r^2}$.

Für die Concavlinse findet man leicht an einer ähnlich, wie für die Convexlinse gezeichneten Figur:

Längenabweichung: $= \dfrac{n^2}{2\,(n-1)} \cdot \dfrac{b^2}{r}$.

47. Figur 3. stellt den Durchschnitt einer durch einen beliebigen einfallenden Strahl und durch den Mittelpunkt der Kugel gelegten Ebene mit der Kugel dar. Die schneidende Ebene und daher auch die Durchschnittsfigur enthält den einfallenden Strahl, das Einfallsloth, die gebrochenen Strahlen und den parallel zum Einfallstrahl durch den Mittelpunkt gehenden Strahl. In der Figur ist:

Fig. 3.



SP der einfallende Strahl,

PQ, QF die gebrochenen Strahlen,

CF die Entfernung des Vereinigungspunktes der in einem Cylinderringe vom Radius CG einfallenden Strahlen.

Bedeutet n den Brechungsindex im Allgemeinen, so kann man schreiben:

$$CF = r\frac{\sin\alpha}{\sin(2\alpha - 2\beta)} = r\frac{\sin\alpha}{\sin 2\left\{\alpha - Arc\sin\frac{1}{n}\sin\alpha\right\}}.$$

Für Randstrahlen ($\alpha = 90^0$) wird $CF = \frac{r}{2}\frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}$.

Für Centralstrahlen ($\alpha = \beta = o$) wendet man am besten den durch Vertauschung von Sinus mit Bogen aus dem genauen Werthe von CF hervorgehenden Näherungsausdruck an:

$$CF = \frac{r}{2}\cdot\frac{n}{n-1},$$

der, da er kein α mehr enthält, ohne Veränderung auch für den Fall $\alpha = o$ gilt.

Die Verwendung der eben angegebenen Ausdrücke in den drei Specialfällen der Aufgabe ergiebt bei:

	Glas [52]	Wasser [53]	Schwefelkohlenstoff
Längenabweichung:	$0.4938\,r$	$0.9921\,r$	$0.2692\,r$.

48. Indem man überall in Formel A. die der Aufgabe entsprechenden Specialwerthe für die einzelnen Grössen einsetzt und berücksichtigt, dass bei der Convexlinse $F = \frac{r}{n-1}$, und bei der Concavlinse $F = -\frac{r}{n-1}$ ist, findet man:

beim Strahleneintritt in die plane Seite der Convexlinse:

$$\triangle F = -\frac{n^2}{2(n-1)}\cdot\frac{b^2}{r}, \text{ resp. } \triangle F = -2.25\frac{b^2}{r};$$

beim Strahleneintritt in die gewölbte Seite der Convexlinse:

$$\triangle F = -\frac{n^3-2n^2+2}{2n(n-1)}\cdot\frac{b^2}{r}, \text{ resp. } \triangle F = -0.583\frac{b^2}{r};$$

beim Strahleneintritt in die plane Seite der Concavlinse:

$$\triangle F = +\frac{n^2}{2(n-1)}\cdot\frac{b^2}{r}, \text{ resp. } \triangle F = +2.25\frac{b^2}{r};$$

beim Strahleneintritt in die hohle Seite der Concavlinse:

$$\triangle F = +\frac{n^3-2n^2+2}{2n(n-1)}\cdot\frac{b^2}{r}, \text{ resp. } \triangle F = +0.583\frac{b^2}{r}.$$

49. Formel A. für eine biconvexe Linse geht für $n = \frac{3}{2}$ über in:

$$\triangle f = -\frac{f^2 x^2}{24 F}\left\{\frac{52}{a^2} + \frac{14}{a r} - \frac{66}{a \varrho} + \frac{7}{r^2} + \frac{6}{r \varrho} + \frac{27}{\varrho^2}\right\}.$$

Für Parallelstrahlen zur Axe erhält man hieraus, je nachdem dieselben zuerst die convexe oder die concave Fläche der Linse treffen, resp.:

$$\triangle F = -\frac{F x^2}{24}\left\{\frac{7}{r^2} - \frac{6}{r \varrho} + \frac{27}{\varrho^2}\right\};$$

$$\triangle F = -\frac{F x^2}{24}\left\{\frac{27}{r^2} - \frac{6}{r \varrho} + \frac{7}{r \varrho}\right\}.$$

Man findet hierauf für die Differenz beider Abweichungen, wenn man zugleich F in r und ϱ ausdrückt, den absoluten Werth:

$$\tfrac{5}{3} b^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right).$$

50. Zur Ausrechnung empfiehlt sich die Formel A. für $n = \frac{3}{2}$ (s. Anfang voriger Aufl.); sie führt, wenn auch F in r ausgedrückt wird, zu folgenden Abweichungswerthen:

beim Eintritt der Strahlen in die stärker gekrümmte Fläche:

$$\triangle F = -0.625 \frac{x^2}{r} = -\tfrac{5}{8} \frac{x^2}{r};$$

beim Eintritt der Strahlen in die schwächer gekrümmte Fläche:

$$\triangle F = -2.014 \frac{x^2}{r} = -\frac{145}{72} \cdot \frac{x^2}{r}.$$

51. Die Formel A. giebt nach dem Einsetzen der Specialwerthe für die ganze Linse:

$$\triangle F = -\tfrac{5}{3} = -1.667 \text{ cm}.$$

Bei der getheilten Linse kann man etwa rechnen, wie folgt: die Brennweite jeder, demnach auch der ersten, dem Lichte zugekehrten Hälfte ist $F = 200$ cm für Centralstrahlen; der Zusatz, den F für Randstrahlen erleiden muss, ist nach der entsprechend für $n = \frac{3}{2}$ vorgerichteten Formel A. (s. Aufl. 49):

$$\triangle F = -\frac{F x^2}{24} \cdot \frac{7}{r^2} = -\tfrac{7}{12} \text{ cm} = -0.583 \text{ cm}.$$

Da die nach dem Brennpunkt der ersten Theillinse convergirenden Strahlen beim Austritt aus dem Glase sofort an die zweite Theillinse gelangen, so ist die Rechnung nur durch die wieder aus A. für $n = \frac{3}{2}$ hervorgehende Gleichung weiter zu führen:

$$\Delta f = -\frac{f^2 x^2}{24 F}\left\{\frac{52}{a^2} + \frac{14}{ar} + \frac{7}{r^2}\right\},$$

und zu setzen:

$$a = -200 \text{ cm}, \quad r = 100 \text{ cm}, \quad F = 200 \text{ cm}, \quad f = 100 \text{ cm}.$$

Es ergiebt sich hierauf für die Abweichung an der zweiten Theillinse allein:

$$\Delta f = -\tfrac{13}{48} \text{ cm} = -0.271 \text{ cm}.$$

Die Gesammtabweichung, die die parallel zur Axe einfallenden Strahlen beim Durchgange durch beide Theillinsen erfahren, ist die Summe der berechneten Werthe:

$$-0.583 - 0.271 = -0.854 \text{ cm}.$$

Farbenzerstreuung in Prismen.

52. Folgende Tabelle enthält die Resultate:

No. des Beispieles:	Winkel des Einfallslothes der Austrittsfläche mit dem austretenden rothen Strahl:	violetten Strahl:	das austretende rothe und violette Licht schliesst einen Winkel ein:
1) (74)	16° 43.5′	17° 22.9′	0° 39.4′
2) (75)	31° 58.5′	33° 33.2′	1° 34.7′
3) (76)	30° 52.0′	31° 19.4′	0° 27.4′
4) (77)	48° 35.4′	49° 27.8′	0° 52.4′
5) (78)	74° 37.1′	77° 41.8′	3° 4.7′
6) (79)	15° 54.4′	16° 32.4′	0° 38.0′
7) (80)	19° 4.9′	20° 21.6′	1° 16.7′
8) (81)	53° 7.8′	55° 5.1′	1° 57.3′.

53. Der Eintrittswinkel der rothen Strahlen ist deren Austrittswinkel gleich; diese Beziehung dient zur Berechnung, wobei erhalten wird:

brechender Winkel des Prisma's:	20°	30°	40°
Eintrittswinkel des Lichtes:	15° 5.9′	22° 50.7′	30°52.0′.

Weiterführung der Rechnung mit Benutzung der Eintrittswinkel ergiebt sodann für die Winkeldifferenz des austretenden rothen und violetten Lichtes:

$0^0\,24.8'$ $0^0\,38.6'$ $0^0\,55.0'$.

Farbenzerstreuung bei der Brechung an sphärischen Flächen.

54 (84). Der Winkel, den die bei C austretenden Strahlen mit den eintretenden Strahlen bilden, ist:

$$x = 4\beta - 2\alpha.$$

Den in der Aufgabe gegebenen Grössen zufolge ist daher:

für rothes Licht: $x = 28^0\,15.6'$.
„ violettes Licht: $x = 27^0\,21.7'$.

55. Die chromatische Längenabweichung vr ergiebt sich aus Or und Ov, welche ihrerseits leicht durch die Formel

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

zu berechnen sind; die Durchmesser der Abweichungskreise berechnet man aus den mit Hülfe der Figur (s. Aufg.) nicht schwer zu beweisenden Gleichungen:

$$\frac{vr}{AA_1} = \frac{Ov}{RR_1}; \qquad \frac{vr}{BB_1} = \frac{Ov}{RR_1} + \frac{Or}{RR_1}; \qquad \frac{vr}{CC_1} = \frac{Or}{RR_1}.$$

Nach Durchführung der Rechnungen ergiebt sich:

	vr in cm:	CC_1 in cm:	BB_1 in cm:	AA_1 in cm:
Crownglaslinse:	0.659	0.385	0.196	0.400
Flintglaslinse:	0.893	0.625	0.323	0.667.

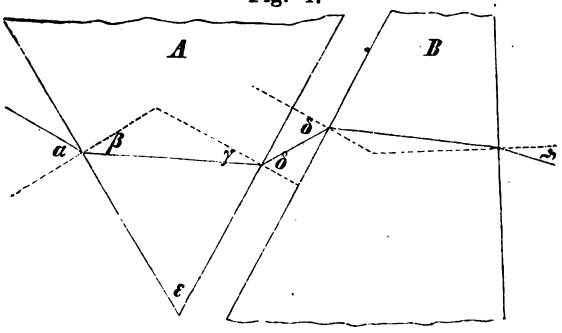
56. Eine Skizze des vorliegenden Falles führt sofort zu dem Resultate: das Stück Axe, durch welches alle gebrochenen Strahlen hindurchgehen, ist gleich der Summe der chromatischen Abweichung plus der sphärischen Abweichung für die violetten Strahlen.

Die sphärische Abweichung berechnet sich nach Formel A. vor Aufgabe 48 zu 1.841 cm; die chromatische Abweichung ist 5.208 cm, folglich ist die gesammte Längenabweichung:

7.049 cm.

Achromasie von Prismen.

Fig. 4.



57. In Fig. 4 möge δ den Austrittswinkel der rothen Strahlen aus dem Crownglasprisma, $\delta + \triangle\delta$ den Austrittswinkel der violetten Strahlen aus demselben Prisma bedeuten.

Es sind folgende Ausdrücke leicht zu beweisen:

I. $$\sin\delta = \sin\varepsilon\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\varepsilon\sin\alpha;$$

II. $$\sin(\delta+\triangle\delta) = \sin\varepsilon\sqrt{(n+\triangle n)^2 - \sin^2\alpha} - \cos\varepsilon\sin\alpha.$$

Da ε' so zu wählen ist, dass der Austrittswinkel ϑ aus dem Flintglasprisma für rothe und violette Strahlen gleich gross ausfällt, so gelten ferner die Beziehungen:

$$\sin\vartheta = \sin\varepsilon'\sqrt{n'^2 - \sin^2\delta} - \cos\varepsilon'\sin\delta;$$

$$\sin\vartheta = \sin\varepsilon'\sqrt{(n'+\triangle n')^2 - \sin^2(\delta+\triangle\delta)} - \cos\varepsilon'\sin(\delta+\triangle\delta).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich:

$$tang\,\varepsilon' = \frac{\sin(\delta+\triangle\delta) - \sin\delta}{\sqrt{(n'+\triangle n')^2 - \sin^2(\delta+\triangle\delta)} - \sqrt{n'^2 - \sin^2\delta}}.$$

58 ([91], [92], [93]). Die Schlussformel voriger Auflösung ergiebt für

das Crownglasprisma vom brechenden Winkel:	20^0	30^0	40^0
ein achromatisirendes Flintglasprisma vom brechenden Winkel:	$9^0\,43.7'$	$14^0\,3.3'$	$17^0\,40.6'$.

59 ([94], [95], [96]). Die Schlussformel von Auflösung 57 führt zu folgenden Ergebnissen:

Crownglasprisma vom brechenden Winkel:	20^0	30^0	40^0
achromatisirendes Flintglasprisma vom brechenden Winkel:	$10^0\,1.1'$	$14^0\,57.0'$	$19^0\,58.8'$.

Achromasie von Linsen.

60. Der Aufgabe gemäss müssen die Hauptbrennweiten der combinirten Linsen für rothe und violette Strahlen gleichen Werth haben; dies führt beispielsweise für a unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen der Aufgabe zu den Bedingungsgleichungen:

$$\frac{1}{100} = 0.5\ \left(\frac{1}{2r_2} + \frac{1}{r_2}\right) + 0.6\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}\right),$$

$$\frac{1}{100} = 0.52\left(\frac{1}{2r_2} + \frac{1}{r^2}\right) + 0.64\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}\right).$$

Als Resultat der Aufgabe ergiebt sich:

a) $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 30$ cm, $r_3 = -30$ cm, $r_4 = 120$ cm;
b) $r_1 = 600$ cm, $r_2 = 300$ cm, $r_3 = -300$ cm, $r_4 = 1200$ cm;
c) $r_1 = 40$ cm, $r_2 = 40$ cm, $r_3 = -40$ cm, $r_4 = \infty$;
d) $r_1 = -40$ cm, $r_2 = -40$ cm, $r_3 = +40$ cm, $r_4 = \infty$;
e) die Aufgabe ist unmöglich.

Wellenbewegung des Lichts.

61. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde, in der Einheit einer Billion ausgedrückt, beträgt:

roth (B)	gelb (D)	blaugrau (F)	blau (G)	violett (H)
437	509	619	698	763.

62. Die Schwingungsdauer in der Einheit $\frac{1}{10^{15}}$ Sekunde ausgedrückt, beträgt bei einem durch den leeren Raum hindurchgehenden farbigen Strahle:

roth (B)	gelb (D)	blaugrün (F)	blau (G)	violett (H)
2.29	1.96	1.62	1.43	1.31.

63. Die Wellenlängen der farbigen Strahlen im Crownglas No. 13 sind:

roth (B)	gelb (D)	blaugrün (F)	blau (G)	violett (H)
4.51	3.94	3.16	2.79	2.54.

64. Die Geschwindigkeit des Lichtes beträgt:

Crownglas und rothes Licht: 200 Millionen m,
„ „ violettes „ : 197 „ m,
Flintglas und rothes Licht: 188 „ m,
„ „ violettes „ : 183 „ m.

65. Es sei λ die Wellenlänge im Allgemeinen, x der Abstand des ersten hellen, y der Abstand des ersten dunkeln Streifens von der Mitte. Die Bestimmungsgleichungen für x und y sind:

$$\sqrt{100^2+(\tfrac{1}{2}+x)^2}-\sqrt{101^2+(\tfrac{1}{2}-x)^2}=\lambda,$$

$$\sqrt{100^2+(\tfrac{1}{2}+y)^2}-\sqrt{100^2+(\tfrac{1}{2}-y)^2}=\frac{\lambda}{2},$$

oder angenähert: $\frac{x}{100}=\lambda, \quad \frac{y}{100}=\frac{\lambda}{2}.$

Es ergiebt sich hierauf folgendes Resultat:

	roth (B)	gelb (D)	blaugrün (F)	blau (G)	violeit (H)
Entfernung des ersten hellen Streifens von der Mitte mm:	0.0687	0.0581	0.0485	0.0430	0.0393
Entfernung des ersten dunkeln Streifens von der Mitte mm:	0.0344	0.0295	0.0243	0.0215	0.0197.

66. Die Polarisationswinkel sind bei:

Wasser:	Glas:	Schwefelkohlenstoff:
$53^0\,8'$	$56^0\,19'$	$58^0\,24'$.

67.

Winkel von Polarisationsebene und Hauptschnitt:	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0
Intensität des ordentlich gebrochenen Strahles:	100	93	75	50	25	7	0
Intensität des ausserordentlich gebrochenen Strahles:	0	7	25	50	75	93	100.

68. Das in Betracht gezogene Aethertheilchen habe die Entfernung x vom gemeinschaftlichen Ausgangspunkte, T sei die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge. Die Gleichungen sind:

des Strahles mit Horizontalbewegung:

$$y = a \sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right],$$

des Strahles mit Verticalbewegung:

$$z = a \sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{\left(x\pm\frac{\lambda}{4}\right)}{\lambda}\right],$$

oder:

$$y = \quad a \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right],$$

$$z = \mp a \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right],$$

woraus $y^2 + z^2 = a^2$ folgt, das ist eine circulare Bewegung. Eine Skizze der Bewegung in verschiedenen Stadien der Schwingung ergiebt ferner:

dem Voreilen des horizontal schwingenden Strahles entspricht ein linkscircularpolarisirter Strahl;

dem Zurückbleiben des horizontal schwingenden Strahles entspricht ein rechtscircularpolarisirter Strahl.

69. Ist τ das Maass für die Differenz in den Schwingungsphasen der componirenden und des resultirenden Strahles, so lässt sich die Gleichung der Componenten schreiben:

$$y_1 = a \sin 2\pi \frac{t + \tau}{T},$$

$$y_2 = a \sin 2\pi \frac{t - \tau}{T}.$$

Da $y_1 + y_2 = y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ sein muss, so erhält man für $\tau = \frac{1}{6} T$ und $\frac{5}{6} T$ als Resultat.

70. Bei der links gedrehten Ellipse kann man als componirende Strahlen ansehen:

$$y = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T}\right), \quad z = c \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right];$$

bei der rechtsgedrehten Ellipse würden die Strahlen

$$y = b \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right], \quad z = \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

an Stelle des elliptisch polarisirten Strahles gesetzt werden können.

IV. Abtheilung.

Lehre von der Wärme.

Thermometrie.

1. Die Rechnung ergiebt:

1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)	5 (5)	
12.88	27.78	60.16	64.00	73.36	
6 (6)	7 (7)	8 (8)	9 (9)	10 10)	
− 32.00	− 25.87	− 20.00	− 9.60	− 3.60	Gr. R.

2.

1 (11)	2 (12)	3 (13)	4 (14)	5 (15)	
17.00	52.50	61.00	75.00	81.20	
6 (16)	7 (17)	8 (18)	9 (19)	10 (20)	
− 12.00	− 15.00	− 16.50	− 32.25	− 3.75	Gr. C.

3. Man erhält in Fahrenheit'schen Graden:

1) (21)	Temperatur der grössten Dichte des Wassers	39.2	Gr. F.
2) (22)	Siedepunkt des Schwefeläthers	96.8	„ „
3) (23)	„ „ Alkohols	172.4	„ „
4) (24)	„ „ Phosphors	554.0	„ „
5) (25)	„ „ Quecksilbers	662.0	„ „
6) (26)	„ „ flüssigen Ammoniaks . . .	− 40.0	„ „
7) (27)	„ der flüssigen schwefligen Säure .	+ 14.0	„ „

4. Die umgerechneten Temperaturen sind:

1) (28)	Schmelzpunkt des Zinnes	235°	C.	=	188°	R.
2) (29)	„ „ Wismuthes . . .	270°	„	=	216°	„
3) (30)	„ „ gebl. Wachses . .	68°	„	=	54.4°	„
4) (31)	„ „ festen Quecksilbers	− 39°	„	=	− 31.2°	„
5) (32)	„ „ festen Broms . .	− 25°	„	=	− 20.0°	„
6) (33)	„ „ Natriums . . .	+ 95.6°	„	=	+ 76.48°	„
7) (34)	„ „ Antimons . . .	425°	„	=	340°	„

5. 0 Gr. Fahrenh. = − 17.8 Gr. C. = 14.2 Gr. R.

6 ([39b 12]). − 40° C. = − 40° F., − 25.6° R. = − 25.6° F.
− 11$\frac{3}{7}$° C. = + 11$\frac{3}{7}$° F., − 9.85° R. = + 9.85° F.

7. Die Aufstellung der Correctionstabelle gelingt leicht nach Ermittelung des Werthes von 1 Scalengrad = 1.004 Thermometergrad. Man findet für

	0	20	40	60	80	100
Correction:	− 0.8	− 0.7	− 0.6	− 0.6	− 0.5	− 0.4.

8. Die Vergleichung der Abtheilungen der Röhre erfolgt leicht in folgender Weise, wobei die Länge der Röhre vom Theilstrich 0 bis zum Theilstrich 10 gleich 10 Volumina gesetzt wird.

Der Raum vom
Scalentheil 0 bis 5 ist inhaltsgleich mit 89.8 bis 94.8
oder mit 90.0 „ 95.0 = 5 Vol.
Scalentheil 5 bis 10 ist inhaltsgleich mit 94.8 „ 99.7
„ 5.2 „ 10.3 ist inhaltsgleich mit 95.0 „ 100.0 = 5.1 Vol.

Controle:
Scalentheil 0 bis 10 ist inhaltsgleich mit 89.8 bis 99.7
„ 0.2 „ 10.3 „ „ „ 90.0 „ 100.0 = 10.1 Vol.

Der Raum vom
Scalentheil 0 bis 5 ist inhaltsgleich mit 80.0 bis 85.0 = 5.0 Vol.
„ 5 „ 10 „ „ „ 85.0 „ 90.0 = 5.0 „

Controle:
Scalentheil 0 bis 10 ist inhaltsgleich mit 80 bis 90 = 10 Vol.

Der Raum vom
Scalentheil 10 bis 15.2 ist inhaltsgleich mit 90 bis 95, demnach
„ 10 „ 15.0 „ „ „ 90 „ 94.8 = 4.8 Vol.
„ 15.2 „ 20.2 „ „ „ 95 „ 100
„ 15.0 „ 20.0 „ „ „ 95 „ 100 = 5.1 Vol.

Controle:
Scalentheil 10 bis 20.2 ist inhaltsgleich mit 90 bis 100
„ 10 „ 20.0 „ „ „ 90 „ 99.8 = 9.9 Vol.

Führt man die angedeutete Rechnung zu Ende und addirt hierauf alle zwischen dem Theilstrich 0.8 (Eispunkt) und 100.4 (Siedepunkt) liegenden Volumina, so findet man

Fundamentalabstand = 100 Grad = 99.3 Volumina, oder
1 Volumtheil = 1.00705 Grad

Nachdem man nun mit Hülfe des soeben gefundenen Werthes für jeden Theilstrich den äquivalenten Gradwerth ermittelt hat, geht durch den Vergleich der Zahl eines Theilstriches mit deren Gradwerth folgende Correctionstabelle hervor:

Ablesung:	Correction:	Ablesung:	Correction:
5	— 0.8	55	— 0.6
10	— 0.7	60	— 0.7
15	— 0.9	65	— 0.7
20	— 0.8	70	— 0.8
25	— 0.8	75	— 0.7
30	— 0.6	80	— 0.6
35	— 0.7	85	— 0.6
40	— 0.6	90	— 0.6
45	— 0.7	95	— 0.5
50	— 0.6	100	— 0.4

Ausdehnung fester und tropfbarflüssiger Körper durch die Wärme.

9 a. Die mittleren Ausdehnungscoëfficienten betragen zwischen 0 und 100 Grad C.:

bei Platin 0.00000886,
„ Blei 0.00002800.

b. Die Ausdehnung des Bleistabes beträgt:

	nach der Formel:	nach dem mittleren Ausdehnungscoëfficienten:
bis 20 Gr.	54816	56000
„ 40 „	110224	112000
„ 60 „	166224	168000
„ 80 „	222816	224000.

10.
$$f_t = f_o\left[1 + \frac{3192}{10^8}t + \frac{208}{10^{10}}t^2\right],$$
$$i_t = i_o\left[1 + \frac{4788}{10^8}t + \frac{315}{10^{10}}t^2\right].$$

11. Die Länge des Maasses beträgt bei 30 Gr. C.:

Messing:	Glas:	Eisen:	Platin:
1000.285	1000.1275	1000.18	1000.135 mm.

12 a. Bei der Erhitzung von 0 bis 100 Gr. C. nimmt die Oberfläche um 75.4 qmm, der Inhalt um 1885 cbmm zu.

b ([50]). Die Marke für 100 cbcm grenzt folgende Räume ab:

bei 30 Gr. C. 100.039
„ 0 „ „ 99.961.

13a ([74]). Der Schwerpunkt der Quecksilbermasse liegt bei 30 Gr. C. 25.123 cm hoch über der Grundfläche des Cylinders.

b ([78]). Haben die kürzeste, mittlere und längste Kante des Prisma's, resp. k, m und l cm Länge, und ist γ die Dichtigkeit des Materiales, so ist das Trägheitsmoment um die kürzeste Kante:

$$T = kml \,.\, \gamma \frac{m^2 + l^2}{3}.$$

Die Berücksichtigung der Aenderung der Dimensionen mit der Temperatur bei der Ausrechnung ergiebt:

Trägheitsmoment bei 0 Gr. C. 7958.2
„ „ 25 „ „ 7963.0.

14a. Der Unterschied beträgt je nach Zugrundelegung des einen oder anderen Ausdehnungscoëfficienten:

0.03 mm.

b ([53 b. 64]). Die Luftdrucke betragen bei:

30	29	28	27	26	25 Gr. C.
773.16	772.02	770.88	769.73	768.59	767.45 mm.
24	23	22	21	20	19 Gr. C.
766.31	765.16	764.02	762.88	761.74	760 59 mm;

c ([66 b. 70]). Die auf 0 Grad reducirten Luftdrucke betragen:

767.23 738.67 746.62 731.32 770.35 mm.

15. Es sei im Allgemeinen:

t die Beobachtungstemperatur,
l der direct abgelesene Barometerstand,
β „ Ausdehnungscoëfficient des Maassstabes,
α „ „ „ Quecksilbers.

Das Stück Scala, welches bei t Grad l Theilstriche zeigt, besitzt die Länge $l(1 + \beta t)$, daher ist der Barometerstand bei 0 Grad:

$$\frac{l(1 + \beta t)}{1 + \alpha t} = l\,[1 - (\alpha - \beta)\,t] = l - l\,(\alpha - \beta)\,t.$$

Die Rechnung ergiebt im Speciellen für den reducirten Barometerstand:

Messingmaassstab:	738.79	746.94	731.19
Glasmaassstab:	738.71	746.74	731.27.

16. Spec. Gewicht von Platin bei 0 Grad 23.000
„ „ „ Kupfer „ 0 „ 8.878.

17. Es sei:

m das beim Wägen in der Luft beobachtete Gewicht eines Körpers,
l das Gewicht der von ihm verdrängten Luft,
w das nach den Wägungen in Luft und Wasser durch Subtraction gefundene Gewicht des verdrängten Wassers,
Q das specifische Gewicht des beim Versuch benutzten Wassers,
λ das specifische Gewicht der Luft beim Versuch, bezogen auf Wasser von 4 Gr. C.,
Δ das specifische Gewicht des Körpers, der die Versuchstemperatur hat, bezogen auf Wasser von 4 Gr. C.

Nach Einführung dieser Bezeichnungen ist:
das Gewicht des Körpers im leeren Raume

$$m + l,$$

das Gewicht des Wassers von der Versuchstemperatur im leeren Raume

$$w + l,$$

das Gewicht des verdrängten Wassers (von 4 Gr. C.)

$$\frac{w+l}{Q},$$

das wahre specifische Gewicht des Körpers (von der Versuchstemperatur), bezogen auf Wasser von 4 Gr. C.

$$\Delta = \frac{m+l}{w+l} Q.$$

Das Gewicht der verdrängten Luft ist

$$\frac{w+l}{Q}\lambda = l,$$

und dieser Gleichung wird genügt durch

$$l = \frac{w\lambda}{Q-\lambda};$$

es ergiebt sich hierauf durch Einsetzung des eben entwickelten Werthes von l in den Ausdruck Δ:

$$\Delta = \frac{m}{w}(Q-\lambda) + \lambda.$$

Der Schlussausdruck für Δ ergiebt bei der Anwendung auf die beiden Beispiele:

Spec. Gewicht von Platin bei 20 Gr. C. 22.988
„ „ „ Kupfer „ 20 „ „ 8.868.

18. Die specifischen Gewichte der beiden Metalle von 30 Gr. C., bezogen auf Wasser von derselben Temperatur, ergiebt die Rechnung zu:

Kupfer 8.901
Eisen 7.824.

19. Das specifische Gewicht von Alkohol von 0 Grad C., verglichen mit Wasser von 4 Grad C., ergiebt sich aus dem Versuchsmittel (0.8013), nachdem $v_{10} = 1.0105 v_0$ aus der Formel berechnet wurde:

$$0.8013 \times 1.0105 \times 0.99974 = 0.8095.$$

20 a. Geht man von der Bedingungsgleichung

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1 + 3\beta t_1}{1 + \alpha t_1} \cdot \frac{1 + \alpha t_o}{1 + 3\beta t_0}$$

aus, so erhält man nach der Vereinfachung von deren rechter Seite durch Heraufschaffen aller sehr kleiner Grössen in den Zähler den Ausdruck:

$$3\beta = \alpha - \frac{p_0 - p_1}{p_0 (t_1 - t_0)}.$$

b.[52]). Mit Benutzung der Formel für 3β (s. a.) findet man für den mittleren linearen Ausdehnungscoefficienten des Glases zwischen 0 und 100 Gr.:

0.00000876.

Ausdehnung, Druck und Gewicht bei Gasen und Dämpfen.

21 a. Bei Nichtberücksichtigung der Ausdehnung des Glases wird bei t Grad C. die ausgetriebene Luftmenge ein Stück Röhre von der Länge

$$\frac{6 \times 0.003665 (40 + t)}{0.03}$$

einnehmen. Dieser Ausdruck ergiebt für

die Temperatur $t =$	-20	0	$+20$	$+40$	$+60$
die Verschiebung des Quecksilberfadens um:	14.7	29.3	44.0	58.6	73.3 cm.

b. Wenn die Glasausdehnung mit in Rechnung gezogen wird, beträgt die Verschiebung des Fadens bei t Grad C.:

$$\frac{6 \times 0.0036395 \times (40 + t)}{0.03 [1 + 0.000017 (40 + t)]}.$$

demnach:

bei der Temperatur:	−20	0	+20	40	60	Gr.
Fadenverschiebung:	14.6	29.1	43.6	58.2	72.7	„

22. Es entsprechen einander folgende Volumina ausgetriebener Luft:

Volumen:	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Temperatur:	27	55	82	109	136 Gr. C.
Volumen:	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Temperatur:	164	191	218	246	273 Gr. C.

23. Temperaturen und Druck in Atmosphären von Innen nach Aussen entsprechen einander in folgender Weise:

Temperatur Grad C.:	525	700	1000	1300	1550
Druck Atmosphären:	2.92	3.57	4.67	5.76	6.68.

24(87 b. 88). Die reducirten Luftvolumina (760 mm, 0 Grad C.) sind in derselben Ordnung als die Beispiele der Aufgabe aufgeführt:

9.393	14.343	9.354	6.900
10.154	5.406	6.743	7.376 cbcm.

25 a. Für gewöhnliche Celsius'sche Grade ist:

$$v = v_0 (1 + \alpha t).$$

Da nun der absolute Nullpunkt $-\frac{1}{\alpha} = -273$ Grad C. unter dem Eispunkt liegt, so kann man schreiben:

$$v = v_0 \,.\, \alpha \,.\, T.$$

b. Bei der Temperatur t und dem Druck p_0 ist das Volumen

$$v_0 (1 + \alpha t),$$

bei der Temperatur t und dem Druck p ist das Volumen v

$$\frac{p_0 v_0 (1 + \alpha t)}{p},$$

daher

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t) = 7990 (1 + 0.003665 t).$$

Nach Einführung der absoluten Temperatur T an der Stelle von t erhält man:

$$pv = p_0 v_0 \alpha T = 29.285\ T.$$

26. Die Gewichte von einem Liter Luft unter den angegebenen Verhältnissen betragen:

1.	2.	3.	4.	5.
757.3	1123.1	1208.5	874.6	623.9 mg.

27 a. Gewicht eines Liters trockner Luft bei 750 mm und bei 26 Grad C.:

1165.5 mg;

b. das Gewicht eines Liters Wasserdampf von 25 mm Spannung (26 Gr. C.) beträgt:

$$1165.5 \times \frac{25}{750} \times \frac{5}{8} = 24.3 \text{ mg};$$

c. das Gewicht eines Liters Wasserdampf, welcher bei 26 Gr. C. halbgesättigt ist (12.5 mm Spannung), beträgt:

12.2 mg;

d. das Gewicht von einem Liter bei 750 mm ganz mit Dampf gesättigter Luft setzt sich zusammen aus:

dem Gewicht von einem Liter trockner Luft von 725 mm Druck und 26 Grad C. $= \frac{725}{750} \times 1165.5 = 1126.7$ mg,

dem Gewicht von einem Liter gesättigten Dampf von 25 mm Druck und 26 Grad C. $= 24.3$ mg

1151.0 mg;

e. das Gewicht von einem Liter bei 750 mm halb mit Dampf gesättigter Luft besteht aus:

dem Gewicht von einem Liter trockner Luft von 737.5 mm Druck und 26 Grad C. $= \frac{737.5}{750} \times 1165.5 = 1146.1$ mg,

dem Gewicht von einem Liter halbgesättigten Dampf bei 26 Gr. C. (12.5 mm Exp.-Kr.) $= 12.2$ mg

1158.3 mg.

28. Spannkräfte und relative Feuchtigkeit in ganzen Procenten ergiebt die Rechnung zu:

Spannkraft:	7.4 mm	12.7 mm	9.1 mm
relative Feuchtigkeit:	81 Proc.	73 Proc.	39 Proc.

29 a. Die Spannungen des Wasserdampfes sind resp.:

11.8 mm und 20.8 mm;

b. ihnen entspreohen die relativen Feuchtigkeiten:

37 Procent und 66 Procent;

c. man findet für das Gewicht des in 1 cbm Luft enthaltenen Dampfes im Allgemeinen:

$$0.623 \times \frac{1293.6}{760} \times \frac{e}{1+\alpha t} = 1.060 \frac{e}{1+\alpha t},$$

und hiernach die gesuchten Gewichtsmengen:

11.3 g und 19.9 g.

30. Nach Berechnung der Ausdehnung der Quecksilbersäule durch die Temperaturerhöhung ergiebt sich der Barometerstand:

bei 40 Gr. C. $750.0 + 5.4 - 0.1 = 755.3$ mm
„ 60 „ „ $750.0 + 8.2 - 0.2 = 758.0$ „
„ 100 „ „ $750.0 + 13.6 - 0.7 = 762.9$ „

31. Die Quecksilbersäule wird nach dem Einbringen der Flüssigkeiten ins Vacuum angenähert die Längen haben:

Temperatur:	0	10	20	30 Gr. C.
Wasser:	745	741	733	718 mm
Alkohol:	737	726	705	671 „
Aether:	567	464	317	114 „

32. Der innere Druck beträgt theils infolge der Luftausdehnung, theils infolge der Spannkraft der gesättigten Dämpfe bei Füllung mit

Wasser:	Alkohol:	Aether:	Schwefelkohlenstoff:
2.4	3.6	7.9	5.8 Atmosphären.

Bewegung der Wärme.

33. Es correspondiren folgende Temperaturerhöhungen und Entfernungen des Thermometers von der Wärmequelle:

Temperaturerhöhung:	2 Gr. C.	5 Gr. C.	8 Gr. C.
Entfernung der Wärmequelle:	224 cm	141 cm	112 cm.

34. Das Verhältniss der Durchgangsfläche aller einfallenden zu der aller gespiegelten Strahlen ist im Allgemeinen

$$\frac{(r\beta)^2 \pi}{\left(\frac{r}{2}\beta^3\right)^2 \pi} = \frac{4}{\beta^4},$$

und beträgt daher für halbe Centriwinkel von 5, 10 und 15 Gr. resp.:

68972 4311 852.

35. Das gesuchte Verhältniss ist, da die Seitenabweichung $\frac{10}{59}$ cm beträgt:

3481.

36. Der Uebergang an Wärme beträgt pro Stunde in Calorien $\frac{1 \text{ kg Wasser}}{1 \text{ Gr. C.}}$:

Kupfer:	Messing od. Zink:	Neusilber:	Eisen:	Steinkohle:
396	108	42	60	0.105.

Specifische Wärme, Schmelzwärme, Verdampfungswärme.

37. Für die Mitteltemperaturen ergiebt die Rechnung folgende Werthe:

	ohne Wasserwerth:	mit Wasserwerth:
1. Beispiel (96):	17.9 Gr. C.	17.6 Gr. C.
2. „	17.0 „ „	16.7 „ „
3. „	17.4 „ „	17.0 „ „

38 (98). Die Mitteltemperatur beim Wasserwerth 0 ist:

$$\frac{mt + m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3}{m + m_1 + m_2 + m_3};$$

beim Wasserwerth des Gefässes etc. gleich w:

$$\frac{(m + w)\, t + m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3}{(m + w) + m_1 + m_2 + m_3}.$$

39 a. Wasserwerth des Rührstabes von:

Eisen:	Kupfer:	Messing:	Silber:	Zinn:
2.28	1.902	1.98	1.14	1.124;

b. Temperaturerhöhung vom Versuchswasser und Wasserwerth des Thermometers entsprechen einander in folgender Weise:

Temperaturerhöhung:	1 Gr. C.	1.5 Gr. C.	2 Gr. C.
Wasserwerth:	0.64 g	0.97 g	1.32 g.

40 (102) $x = 96.8$ Gr. C. (103) $z = 30.0$. (105) $v = 68.8$ Gr. C.
(102) $y = 3.2$ „ „ (104) $p = 3.3$. (105) $w = 31.2$ „ „

41. Der Werth der specifischen Wärme, wie er sich durch Berechnung aus der Mischungstemperatur t ergiebt, ist:

$$c = \frac{(P + \Pi)\,(t - \vartheta)}{p\,(T - t)}.$$

Dies giebt in den Specialfällen für

	Blei:	Eisen:	Kupfer:
$c =$	0.030	0.114	0.097,
$\Delta c =$	0.002	0.002	0.002.

42a. Es sind folgende Eismengen dem Wasser zuzusetzen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Eismenge, kg:	10	3	4	1	2;

b. die Temperaturen nach dem Schmelzen von 1 kg eingebrachtem Eis sind:

	1.	2.	3.	4.	5.
Grad C.:	17.6	11 2	11.4	0	5.6.

43. Die erforderliche Eismenge ε erhält man aus der leicht zu beweisenden Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{Wn}{79.4 + t - n};$$

sie giebt:

	1.	2.	3.	4.	5.
Eismenge, kg:	1	2	1	4	10.

44. Bezeichnet man die Anfangstemperatur des Quecksilbers mit t, so ist das Schmelzquantum:

$$\frac{0.533 \,.\, t}{79.4};$$

daher entsprechen den Quecksilbertemperaturen:

	100	80	60	40	20 Gr. C.
die Schmelzmengen:	0.671	0.537	0.403	0.269	0.134 kg.

45. Die Dampfmenge D von 100 Gr. C. kann als eine Wassermenge D von 640 Grad C. angesehen werden. Diese Vorstellung führt zum Ausdruck:

$$D = W \cdot \frac{T - t}{640 - T},$$

welcher die Dampfmengen in den speciellen Beispielen ergiebt:

1.	2.	3.	4.	5.
3 kg	$\frac{1}{3}$ kg	1 kg	1 kg	1 kg.

46. Die Temperatur des Schmelzwassers muss betragen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Grad C.:	0.3	4.7	7.4	13.5	18.9.

Aequivalenz von Wärme und Arbeit.

47. Es entsprechen einander:

ertheilte Geschwindigkeit:	5 m	10 m	15 m	20 m,
verbrauchte Wärmeeinheiten:	5.9	23.6	53.1	94.3.

48. Der Verbrauch an Wärme beträgt:

	1.	2.	3.	4.	5.
Wärmeeinheiten:	0.463	0.465	0.470	0.463	0.491.

49. Der Wärmeverbrauch beträgt:

	pro 24 Stunden:	pro Stunde:	pro Minute:
Wärmeeinheiten:	15283	637	11.

50. $$\Delta V = O_1\delta_1 + O_2\delta_2 + O_3\delta_3 + \ldots$$
$$L = O_1 p\delta_1 + O_2 p\delta_2 + O_3 p\delta_3 + \ldots = p\Delta V.$$

51 a. Die zur Verrichtung äusserer Arbeit verbrauchte Wärme beträgt für:

Quecksilber: $\frac{1}{424} \times \frac{10333}{13596} \times 0.000179 = 0.0000003,$

Eisen: $\frac{1}{424} \times \frac{10333}{7800} \times 0.0003 = 0.0000009;$

b. die specifische Wärme im luftleeren Raume beträgt bei:
Quecksilber 0.0279997, Eisen 0.1119991.

52. Die specifische Wärme der Gase bei constantem Druck ist:

Atmosphärische Luft: $0.1685 + \frac{29.268}{424} = 0.2375,$

Sauerstoff: $0.2175 + \frac{26.471}{424} = 0.2175,$

Wasserstoff: $2.4110 + \frac{422.91}{424} = 3.4084.$

53. Infolge der bei Verdampfung von 1 kg Wasser von 100 °C. eintretenden Volumenvergrösserung um 1.5830 cbm werden zu äusserer Arbeit verbraucht:

$$\frac{10333 \times 1.5830}{424} = 38.6 \text{ Calorien.}$$

Daher setzt sich die Verdampfungswärme zusammen aus

Wärme zu innerer Arbeit:	498.1
„ „ äusserer „	38.6
gesammte Verdampfungswärme:	536.7.

V. Abtheilung.

Lehre vom Magnetismus.

Tragkraft von Magneten.

1. Es sei:

$n = \frac{T}{P}$ das Verhältniss der Tragkraft zum Gewicht,

P in kg das Magnetgewicht, so findet man

$$P = \left(\frac{10.33}{n}\right)^3.$$

Es correspondiren:

$n =$	1	2	3	4	5
$P =$	1102.3	137.8	40.8	17.2	8.8 kg
$n =$	6	7	8	9	10
$P =$	5.1	3.2	2.2	1.5	1.1 kg

$n = 20$

$P = 0.14\,kg.$

Absolutes Mass des Magnetismus und Fernewirkung magnetischer Theile.

2. Die Kraft in absoluten Einheiten beträgt:

	1.	2.	3.	4.	5.
Kraft:	500	800	900	800	500.

3. Die ertheilten Beschleunigungen betragen:

1.	2.	3.	4.	5.
2	5	20	50	9810 mm.

4. Die zurückgelegten Wege betragen:

1.	2.	3.	4.	5.
20	40	36	64	200 mm.

5. Die Beschleunigung (bei Annäherung —, bei Entfernung +) beträgt

1.	2.	3.	4.	5.
−50	+10	−20	−1	+60 mm.

6 (3 b. m. 6.). Die Kräfte, welche N auf n und N auf s ausübt, liefern jede eine senkrecht zu ns gerichtete gleichgrosse Componente, welche ganz allein das Drehungsmoment abgeben. Bei No. 1. ist dasselbe beispielsweise

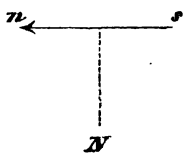
$$\frac{500 \times 100}{(100^2 + 50^2)^{\frac{3}{2}}} \times 100 \times 100.$$

Der numerische Werth des Drehungsmomentes ist in den einzelnen Beispielen in absoluten Einheiten:

1.	2.	3.	4.
357.8	707.1	715.5	456.5.

7. Setzt man (Fig. 5) im Allgemeinen $ns = l$, Distanz von N auf $ns = c$, die Magnetismen in N, n und s resp. M, m, $-m$, so kann man für das Drehungsmoment schreiben:

Fig. 5.



$$\frac{Mmcl}{c^3\left[1 + \frac{1}{4}\frac{l^2}{c^2}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Mml}{c^2}\left\{1 - \frac{3}{8}\frac{l^2}{c^2} + \ldots\right\}.$$

Dieser Näherungsausdruck führt zu den numerischen Werthen:

	1.	2.	3.	4.	5.
Drehungsmoment:	4.981	1.238	0.555	0.312	0.200.

Bestimmungen an der Coulomb'schen Drehwage.

8. Die Kraft, mit welcher die Torsion den um 1 Grad aus der Gleichgewichtslage gedrehten Körper zurückzuführen sucht, ist, da der dem Halbmesser gleiche Bogen 57.296 Grad beträgt

$$\frac{1}{59.296} \cdot f = \frac{1}{59.296} \frac{\pi^2 i}{t^2}.$$

Diese Formel ergiebt in den Specialfällen der Aufgabe für die Torsion bei 1 Grad Drehung in absoluten Einheiten:

137809 34451 15312.

9. Es sei:

α die Ablenkung des Magneten aus dem Meridian,

$n \times 360$ die Torsion des Drahtes, welche α entspricht,

M die Directionskraft des Magneten.

Die Torsion sucht den Magneten mit dem Moment weiter zu drehen:

$$[n \times 360 - \alpha]\, p.$$

Der Erdmagnetismus hat die Tendenz, den Magneten mit dem Moment:

$$M \sin \alpha$$

in den Meridian zurückzuführen. Da zwischen den beiden Drehungsmomenten Gleichgewicht besteht, so ist:

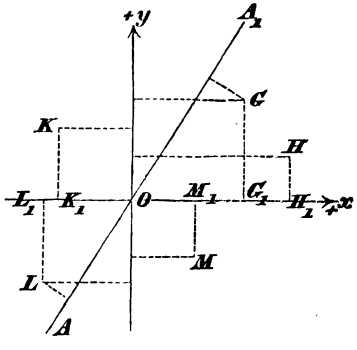
$$M = \frac{[n \times 360 - \alpha]\, p}{\sin \alpha}.$$

Dieser Ausdruck ergiebt:

Torsion:	1×360	2×360	3×360 Grad
Directionskraft:	$1966\,p$	$1928\,p$	$1922\,p$
Torsion:	4×360	5×360	$5\frac{1}{2} \times 360$ Grad
Directionskraft:	$1938\,p$	$1940\,p$	$1902\,p$.

Bestimmung der magnetischen Axe.

Fig. 6.



10. Die Coordinaten der magnetischen Punkte, resp. die Magnetismen selbst, mögen sein:

$$x_1\ y_1\ m_1,\quad x_2\ y_2\ m_2 \text{ etc.}$$

Entsprechen ihnen die von den magnetischen Punkten auf die magnetische Axe gefällten Perpendikel:

$$d_1,\ d_2 \text{ etc.},$$

so ist die nach Einstellung der magnetischen Axe in die Wirkungsrichtung sofort zu übersehende Gleichgewichtsbedingung:

$$\Sigma P\, d = 0,$$

wenn P_1, P_2 etc. die Kräfte sind, mit denen der entfernte Magnetismus auf ein in der drehbaren Ebene liegendes magnetisches Theilchen einwirkt. Bei Ausführung der Rechnung werden, wie gewöhn-

lich, nordmagnetische Theilchen mit +, südmagnetische mit dem — Vorzeichen versehen.

Die Bedingungsgleichung ΣPd wird durch Einsetzung von

$$d = x \sin\alpha - y \cos\alpha$$

($\alpha = \angle A' O H_1$) zu:

$$\Sigma mx \sin\alpha - \Sigma my \cos\alpha = 0,$$

$$tg\,\alpha = \frac{\Sigma my}{\Sigma mx}.$$

Die letzte Gleichung führt nun zu folgenden Ergebnissen für die Beispiele:

1. $\alpha = 89^0\ 53.1'$, 2. ([15]) $\alpha = 120^0\ 57.8'$,

3 ([16]). $\alpha = 140^0\ 45.8$, 4. 5 ([17 18]). $\Sigma mx = \Sigma my = 0$,

jeder beliebige Winkel α genügt der Bedingung, d. h. es giebt unendlich viele magnetische Axen.

11. Die Abweichung der magnetischen von der geometrischen Axe beträgt:

1 Gr. 0.5 Gr. 0.0 Gr.

Schwingungen von Magnetstäben und Horizontalintensität des Erdmagnetismus.

12. Zwischen der beim ganzen Schwingungsbogen β beobachteten Schwingungsdauer t und der auf unendlich kleine Bögen reducirten Schwingungsdauer t_0 findet, wie leicht nachzuweisen ist, die Beziehung statt:

$$t = t_0 [1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{4}\beta + \tfrac{9}{64} \sin^4 \tfrac{1}{4}\beta + ..],$$

und hieraus folgt, da die Glieder der Reihe sehr klein sind:

$$t_0 = t - t [\tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{4}\beta + \tfrac{9}{64} \sin^4 \tfrac{1}{4}\beta + ..].$$

Der letzte Ausdruck ergiebt, dass folgende ganze Schwingungsbögen und Schwingungszeiten für unendlich kleine Bögen zusammengehören:

Schwingungsbögen:	5	10	15	20
Dauer (Sek.):	9.999	9.995	9.989	9.981
Schwingungsbögen:	25	30	35	40
Dauer (Sek.):	9.970	9.957	9.942	9.924.

13. Bezeichnet

J das Trägheitsmoment des Stabes,

D das Drehungsmoment des Stabes,

t die Schwingungsdauer,

so gilt wie beim Pendel die Beziehung:

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{D}}.$$

Die Berechnung von D mittelst dieses Ausdruckes ergiebt in der Einheit 10^6 bei der:

Schwingungsdauer:	10″	15″	20″	25″
D:	1932	859	483	309.

14. Die Ausrechnung ergiebt die Grösse der Schwingungsbögen in Sekunden, wie folgt:

3. B.	5. B.	7. B.	9. B.	11. B.
17541	17094	16658	16233	15819″.

15. Die Formel für kleine Pendelschwingungen führt für die Schwingungsdauer zu den Werthen:

Prag	Dresden	Leipzig	Rostock
10.035″	10.139″	10.220″	10.443″.

16. Die Anwendung der Formel für kleine Pendelschwingungen ergiebt für die Horizontalintensität in:

Berlin	Görlitz	Eisenach	Schwedt
1.86	1.93	1.89	1.85.

17. Man erhält die Drehungsmomente ohne Schwierigkeit, wenn man nicht mit den auf n oder s direct ausgeübten abstossenden oder anziehenden Kräften rechnet, sondern mit deren Componenten in Richtung des Meridians oder senkrecht gegen denselben. Man erhält schliesslich:

A. Für die erste Hauptlage die Drehungsmomente:

a. von N auf ns: $\quad -Nnl\cos v\left(\frac{1}{d^2}+\frac{L}{d^3}\right),$

b. von S auf ns: $\quad +Nnl\cos v\left(\frac{1}{d^2}-\frac{L}{d^3}\right),$

c. von NS auf ns: $\quad -2\frac{NL\,.\,nl\cos v}{d^3}=-\frac{2Mm\cos v}{d^3}.$

B. Für die zweite Hauptlage die Drehungsmomente:

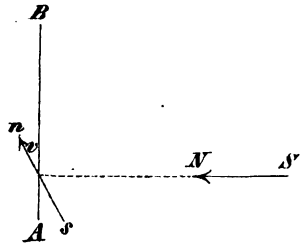
a. von N auf ns: $\quad -Nn\left(\frac{l\sin v}{d^2}+\frac{Ll}{2d^3}\cos v\right),$

b. von S auf ns: $+ Nn\left(\frac{l \sin v}{d^2} - \frac{Ll}{2d^3} \cos v\right)$,

c. von NS auf ns: $-\frac{NL \,.\, nl}{d^3} \,.\, \cos v = -\frac{Mm}{d^3} \cos v.$

18. A. Bei der Horizontalintensität T ist die Nadel im Gleichgewicht, weil das resultirende Drehungsmoment Null ist, d. h. es ist die Bedingung erfüllt:

Fig 7.



$$Tm \sin v - \frac{2Mm \cos v}{d^3} = 0.$$

Eine zweite Gleichung lässt sich aus der Angabe über die Schwingungsdauer t des Stabes ableiten:

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{MT}},$$

wobei K das Trägheitsmoment des Stabes bedeutet.

Beide Gleichungen können in der übersichtlicheren Form (nach Poisson) geschrieben werden:

$$\frac{M}{T} = \frac{d^3 tg\, v}{2}, \qquad MT = \frac{\pi^2 K}{t^2},$$

wonach unmittelbar folgt:

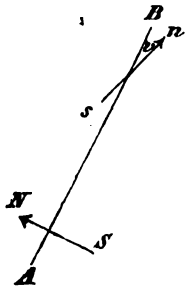
$$\text{I.} \quad T = \frac{\pi}{t} \sqrt{\frac{2K}{d^3 tg\, v}}; \qquad \text{II.} \quad M = \frac{\pi}{t} \sqrt{\frac{K d^3 tg\, v}{2}}.$$

Die Ausrechnung nach I. ergiebt:

Nördliche Breite des Ortes:	Oestliche Länge von Ferro des Ortes:	Horizontalintensität Anfang 1874:
45 Gr.	30 Gr.	2.15
46 „	30 „	2.11
47 „	30 „	2.07
48 „	30 „	2.02
49 „	30 „	1.98,

$$M = 5 \times 10^6.$$

Fig. 8.



B. Da in der zweiten Hauptlage (Fig. 8.) die Tangente des Ablenkungswinkels nur halb so gross ist, als die Tangente des Ablenkungswinkels der ersten Hauptlage, so ergiebt sich der Winkel in der zweiten Hauptlage für 30° Länge und

45° n. Br.	46	47	48	49° n. Br.
5° 18.9′	5° 24.9′	5° 31.1′	5° 39.2′	5° 46.0′.

19. Die gesuchten Näherungswerthe der Horizontalintensität sind in:

München	Dresden	Cöln	Danzig	Königsberg
2.01	1.91	1.86	1.81	1.81.

20. Es ergiebt sich für 10 Jahre 0.0386, demnach für 1 Jahr die mittlere Intensitätszunahme

0.0039.

Declination der Magnetnadel.

21. Die Westrichtung liegt vom magnetischen Meridian nach links zu entfernt:

Berlin	Leipzig	Prag
$77\frac{1}{4}$ Gr.	$77\frac{1}{3}$ Gr.	$78\frac{2}{3}$ Gr.
Görlitz	Eisenach	Dresden
$78\frac{3}{4}$ Gr.	$76\frac{1}{2}$ Gr.	78 Gr.

22. Man erhält für 10 Jahre eine Abnahme von 1.607 Grad, daher die mittlere jährliche Abnahme

0.161 Grad.

Inclination der Magnetnadel.

23. Die beiden Einstellungen der Nadel finden bei Gleichheit der Drehungsmomente statt, die vom Erdmagnetismus und der Schwere herrühren; daher sind die Bedingungsgleichungen:

$$P a \cos i_1 = MH \sin (i_1 - i),$$
$$P a \cos i_2 = MH \sin (i - i_2).$$

Aus den beiden Bedingungsgleichungen ergiebt sich schliesslich nach Elimination der Grössen P, a, M, H:

$$tg\, i = \tfrac{1}{2}\, tg\, i_1 + \tfrac{1}{2}\, tg\, i_2.$$

24. Die Inclination beträgt (angenähert) Anfang 1874 in:

Dresden	Göttingen	Cöln	Danzig	Königsberg
65.9	66.6	66.7	67.7	67.7 Grad.

25. Die mittlere jährliche Inclinationsabnahme beträgt:

$$\frac{0.269}{10} = 0.027.$$

26. Die Berechnung der Totalintensität aus Horizontalintensität und Inclination ergiebt:

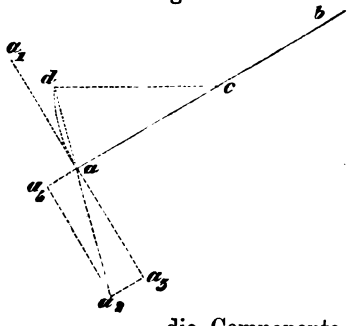
München	Dresden	Göttingen	Cöln	Danzig	Königsberg
4.60	4.68	4.68	4.70	4.77	4.77.

VI. Abtheilung.

Lehre von der Electricität.

Bestimmungen an der Coulomb'schen Drehwage.

Fig. 9.



1. In Figur 9. sei:

d der Mittelpunkt der Standkugel,
a der Mittelpunkt der beweglichen Kugel am Balken,
aa_1 die Grösse der Torsionskraft,
aa_2 die Grösse der abstossenden Kraft.

Gleichgewicht findet statt, wenn:

die Componente $aa_3 =$ der Torsion aa_1.

Diese Bedingung führt bei Fall *a.* z. B. sofort auf die Grösse der electrischen Abstossung $\frac{36\,p}{cos\ 18^0}$; in den übrigen Fällen nach einer kleinen Ergänzung der Zeichnung.

Man erhält schliesslich:

	Electrische Abstossung:	Entfernung der Kugelmitten:	Abstossung bei der Entfernungseinheit:
a.	$37.9\,p$	$0.6180\,r$	$14.46\,pr^2$,
b.	$145.8\,p$	$0.3129\,r$	$14.27\,pr^2$,
c.	$577.1\,p$	$0.1482\,r$	$12.68\,pr^2$.

2. Es sei:

b die Länge des Bogens, den der Mittelpunkt der beweglichen Kugel bei Drehung des Bügels um 1 Grad beschreibt,

p die Torsion, die 1 Grad entspricht,

x die beiden in Contact stehenden Kugeln zuzuführende Electricitätsmenge, damit

α Grad die Ablenkung des Bügels von der beweglichen Kugel werde.

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$\frac{\frac{100^2}{4}}{(15\,b)^2} = 15\,p, \qquad \frac{\frac{x^2}{4}}{(\alpha\,b)^2} = \alpha\,p.$$

Division beider Gleichungen führt nach einigen Umrechnungen zu dem Ausdrucke $x = 100\left(\frac{\alpha}{15}\right)^{\frac{3}{2}}$, wonach entspricht der

Ablenkung:	14	13	12	11	10 Grad
die Electricitätsmenge:	90	81	72	63	54.

3. Es sei:

r der Halbmesser der Nadel,

e_1 die Electricität der Standkugel beim 1. Versuche,

e_2 die Electricität der Standkugel beim 2. Versuche,

p die Torsion, welche 1 Grad Ablenkung entspricht.

Zur Berechnung von e_2 führen die Gleichungen:

$$\frac{E\,e_1}{4\,r^2\,sin^2\,8^0}\,cos\,8^0 = 120\,p, \qquad \frac{E\,e_2}{4\,r^2\,sin^2\,8^0}\,cos\,8^0 = 300\,p$$

und ergeben:

$$e_2 = \frac{300}{120}\,e_1.$$

Die Rechnung ergiebt bezüglich aller Versuche:

Torsion:	300	180	420	600 Grad
Electricität der Standkugel:	2.5	1.5	3.5	5.

4. Es sei:

α Grad der durch Torsion herbeigeführte endliche Kugelabstand,

E die Electricitätsmenge jeder Kugel,

ϑ Grad die Torsion,

$T = 100000$ die Torsion bei 1 Grad Drehung am Hebelarm 1 mm,

r in mm der Radius der Nadel.

Die abstossende Kraft beider Kugeln beim Versuch ist:

$$\frac{E^2}{4\,r^2\,sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}\,cos\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = (\vartheta + \alpha)\frac{T}{r};$$

daher:

$$E = \sqrt{4\,r\,T\,(\vartheta + \alpha)\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\,tg\,\tfrac{1}{2}\,\alpha}.$$

Die Ausführung ergiebt in absoluten Einheiten:

bei der Torsion:	6	15	26	39	54 Grad,
die Electricität jeder Kugel:	2209	2761	3314	3866	4418.

Electrischer Zustand auf der Oberfläche von Ellipsoiden und Kugeln.

5. Die Dichtigkeit an den Enden der Axen a, b, c ist respective:

A.	$h = 10$	20	100,
B.	$h = 5$	10	500,
C.	$h = 100$	100	100000,
D.	$h = 0.5$	0.5	0.5.

6. Es beträgt nach:

	10	20	30	40	100	200 Minuten,
die vorhandene Electricität:	6703	4493	3012	2019	183	3,
der Electricitätsverlust:	3297	5507	6988	7981	9817	9997.

Entladung der Electricität.

7. A. Die Discussion einer Zeichnung des Falles zeigt ohne Schwierigkeit, dass der vom optischen Bilde durchlaufene Bogen $2\,\alpha$ beträgt.

B. Während der Drehung des Spiegels um:

1	0.5	0.1 Grad

durchläuft das optische Bild

106.4	53.2	10.6 mm.

8. A. Die der Bilddrehung um 24 Grad entsprechende Spiegeldrehung um 12 Grad $= \frac{1}{30}$ Umdrehung, führt auf die Funkendauer $= \frac{1}{24\,000}$ Sekunde.

B. Der Verschiebung des mittleren Bildes um 0.5 Grad entspricht die Zeit $\frac{1}{1152000}$ Sekunde; daher beträgt die Geschwindigkeit der Electricität 483840 Kilometer.

9. Die Länge des Spiegelbildes beträgt bei der Funkendauer:

0.00004	0.00007	0.00010	0.00015 Sekunde
23.04	40.32	57.60	86.40 Grad.

10. Es entsprechen einander:

Flaschenzahl:	4	3	8	16	4,
Umdrehungszahl:	120	25	400	200	200,
Schlagweite:	16.2	4.5	27	6.75	27 mm.

11. Folgende Zahlen entsprechen einander:

Flaschenzahl:	6	8	2	18	15,
Schlagweite:	9 mm	8 mm	6 mm	12 mm	15 mm,
Umdrehungszahl:	81	96	18	324	338.

Leitungswiderstand electrischer Ströme.

12. Die Widerstände sind resp.:

1.	2.	3.	4.
10	25	62.5	156.25.

13. Die Widerstände sind resp.:

1.	2.	3.	4.
5	0.5	0.4	1.

14. Die gesuchten Widerstände sind:

1.	2.	3.	4.	5.
7	17.5	$3\frac{8}{9}$	$1\frac{5}{16}$	0.56.

15. Die Zahl, welche angiebt, wie viel Mal grösser der Querschnitt sein muss als bei Kupfer, ist bei:

Zink:	Eisen:	Zinn:
2.852	5.500	7.000.

16. Bezeichnet man mit

x in mm den Durchmesser des Drahtes,
y in m die Länge des Drahtes,
w den Widerstand des Drahtes,

so bietet die Natur der Aufgabe die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x^2\,\pi}{4} \times 1000\,y \times 8.9 = 10^6$$

$$\frac{y}{x^2} = w.$$

Die Ausrechnung ergiebt bezüglich der vier Fälle der Aufgabe die Tabelle:

Widerstand:	1	10	100	1000
Drahtlänge in m:	11.96	37.82	119.6	378.2 m,
Drahtdurchmesser in mm:	3.458	1.945	1.094	0.615 mm.

17. Es sei:

W der Widerstand aller Zweige zusammengenommen,

w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 die Widerstände der einzelnen Zweige, sämmtlich in Siemens'schen Einheiten,

dann bedeuten die reciproken Werthe

$$\frac{1}{W},\ \frac{1}{w_1} \cdots \frac{1}{w_5}$$

die Querschnitte, welche ein Quecksilberprisma von 1 m Länge haben muss, damit es die oben genannten Widerstände darbiete. Die Bedingungsgleichung für W erhält nun den Ausdruck:

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \frac{1}{w_4} + \frac{1}{w_5}.$$

Die Ausrechnung ergiebt für den Gesammtwiderstand W:

A. 4.380. B. $1\frac{5}{19}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

18. Bezogen auf die Silbereinheit sind die specifischen Widerstände des:

Platin:	Gold:	Aluminium:
9	1.8	3.0.

19. Die Widerstände der drei Bleidrahtstücke sind:

10.5 10.6 10.65,

und daher das arithmetische Mittel 10.58.

Ohm'sches Gesetz im Schliessungskreise constanter Elemente.

20. Die Anwendung des Ohm'schen Gesetzes führt auf folgende Stromstärken:

Verbindungsart:	Stromstärke beim äusseren Widerstand: 2	8	32	128
1 achtflächiges Element:	140	56	16.5	4.3
2 vierflächige Elemente:	112	70	28	8.2
4 zweiflächige Elemente:	65.9	56	35	14
8 einflächige Elemente:	34.5	33	28	17.5.

21. Das Ohm'sche Gesetz führt zu den Werthen der Stromstärke:

Verbindungsart:	Stromstärke beim ausserwesentlichen Widerstand: 2	8	15	30	60	240
1 zwölfflächiges Element:	272.7	103.4	60.0	31.6	16.2	4.1
2 sechsflächige Elemente:	230.8	136.4	92.3	54.5	30.0	8.1
3 vierflächige Elemente:	176.5	130.4	100.0	66.7	40.0	11.8
4 dreiflächige Elemente:	139.5	115.4	96.0	70.6	46.2	15.0
6 zweiflächige Elemente:	96.8	88.2	80.0	66.7	50.0	20.0
12 einflächige Elemente:	49.6	48.4	47.1	44.4	40.0	25.0.

22. Die Widerstände sind beim:

Platindrahte:	Electro-magneten:	Apparat Ampères:	einem Voltameter:	zwei Voltametern:
10	8.8	450	25	50.

Zu wählen ist diejenige Verbindung, deren wesentlicher Widerstand dem Widerstand im Schliessungskreise möglichst nahe kommt. Wenn die Entscheidung nach folgender Tabelle der wesentlichen Widerstände zweifelhaft erscheint, hat die Berechnung der Stromstärke zu entscheiden:

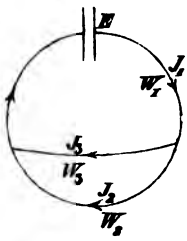
1 sechsflächiges Element:	2 dreiflächige Elemente:	3 zweiflächige Elemente:	6 einflächige Elemente:
$1\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	12	48.

Man findet auf diese Weise am besten:

für den Platindraht, für den Electromagnet } 3 zweiflächige Elemente;

für den Apparat Ampère's, für ein Voltameter, für zwei Voltameter } 6 einflächige Elemente.

Fig. 10.



23. Mit Bezugnahme auf Fig. 10. und die Bezeichnungen der Aufgabe lassen sich folgende allgemeine Gleichungen zufolge der Kirchhoff'schen Sätze aufstellen:

I. Bedingungen, dass die Anhäufung der Electricität an den Abzweigungstellen vermieden wird:

$$J_1 - J_2 - J_3 = 0, \quad J_2 + J_3 - J_1 = 0.$$

II. Aufstellung der in den vorhandenen geschlossenen Kreisen thätigen electromotorischen Kräfte:

$$J_1(R + w_1) + J_3 w_3 = E, \quad J_1(R + w_1) + J_2 w_2 = E,$$
$$J_2 w_2 - J_3 w_3 = 0.$$

Zwei von diesen fünf Gleichungen lassen sich aus den übrigen drei ableiten, und die letzteren ergeben bei der Ausrechnung die Werthe:

$$J_1 = \frac{E(w_2 + w_3)}{D}, \quad J_2 = \frac{E w_3}{D}, \quad J_3 = \frac{E w_2}{D},$$

wobei

$$D = (R + w_1) w_2 + (R + w_1) w_3 + w_2 w_3.$$

Der Gesammtwiderstand W ergiebt sich als Quotient von J_1 in E, und erhält den Ausdruck:

$$W = \frac{D}{w_2 + w_3} = R + w_1 + \frac{w_2 w_3}{w_2 + w_3}.$$

Die Benutzung der eben genannnten allgemeinen Gleichungen ergiebt:

A. 1. $J_1 = 21$ $J_2 = 7$ $J_3 = 14$ $W = 26\frac{2}{3}$;
2. $J_1 = 20$ $J_2 = 10$ $J_3 = 10$ $W = 28$;
3. $J_1 = 17.83$ $J_2 = 16.51$ $J_3 = 1.32$ $W = 31.41$.

B. Der gesammte Widerstand in und ausser der Kette muss in Summa $W = 2 \times 16 = 32$ sein; dies führt mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen zu dem Resultat:

$$w_1 = w_2 = w_3 = 10\frac{2}{3}, \; J_1 = 17.5, \; J_2 = J_3 = 8.75.$$

Chemische Wirkungen des Stromes, Polarisation.

24. Berechnet man für jeden der vier Fälle der Aufgabe die Gesammtmenge des in der Zinkzelle nach der Thonzelle zu trans-

portirten Wasserstoffes, so findet man gleichmässig in allen Fällen pro 24 Stunden:

12.013 g;

daher auch gleichmässig in allen Fällen pro 24 Stunden:

Menge des aufgelösten Zinkes:	391.6 g
Menge des erzeugten wasserfreien Zinkvitrioles:	968.3 g
Menge des erzeugten wasserhaltigen Zinkvitrioles:	1725.1 g
Menge des abgelagerten Kupfers:	380.8 g.

25. Die Ausrechnung mittelst der Aequivalentgewichte führt zu den Resultaten:

	I.	II.	III.
Strommass a, Knallgas cbcm:	8.82	0.54	0.30
Strommass b, Wasser mg:	4.73	0.29	0.16
Strommass c, Kupfer mg:	16.67	1.02	0.56
Strommass d, Silber mg:	56.73	3.47	1.90.

26. Die Berechnung erfolgt nach dem Ohm'schen Gesetze, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Polarisation einen dem Batteriestrom entgegengesetzt gerichteten Strom veranlasst. Die Rechnung ergiebt die Stromstärke:

	bei Einschliessung eines Voltameters	bei Einschliessung zweier Voltameter
blanke Platinelectroden:	22.2	13.6
platinirte Platinelectroden:	23.8	16.4
amalgamirte Zinkelectroden:	27.5	22.6.

Magnetische Wirkungen des galvanischen Stromes.

27. Da die Nadel sehr kurz vorausgesetzt wird, so sind die Ablenkungsdrücke, welche die Pole vom Strome erleiden, nahezu der Axe des Ringes parallel und nahezu ebensogross, als wenn sich die Pole im Mittelpunkte des Ringes befänden. Ein solcher Ablenkungsdruck ist:

$$Lim\,.\,nc\frac{2R\pi i}{n}\frac{m}{R^2}\sin 90^0 = c\frac{2\pi im}{R}.$$

Auf die abgelenkte Nadel wirkt daher:

das Drehungsmoment des Stromes: $c\,.\,\frac{2\pi iml}{R}\cos\alpha$;

das Drehungsmoment des Erdmagnetismus: $Tml\sin\alpha$.

Da beide zusammen das Gleichgewicht der Nadel bewirken, ist:

$$tg\,\alpha = c\,\frac{2\pi i}{RT}.$$

28. Im vorliegenden Falle ist wegen des gewählten Strommasses

$$tg\,\alpha = \frac{2\pi i}{RT} = 0.01877\,i.$$

Den Stromstärken:

2	4	6	8	10

entsprechen die Winkel:

2.1°	4.3°	6.4°	8.5°	10.6°.

29. Ist n die Windungszahl, so ist die Stromstärke i mit Beibehaltung der Bezeichnungen in den vorigen Auflösungen:

in magnetischem Masse: $i = \frac{RT\,tg\,\alpha}{2n\pi}$;

in chemischem Masse: $0.96\,i = \frac{RT\,tg\,\alpha}{2n\pi}$;

daher sind die Reductionsfactoren in beiden Massen resp.

$$\frac{RT}{2n\pi} \text{ und } \frac{1}{0.96}\,\frac{RT}{2n\pi}.$$

Die weitere Ausrechnung ergiebt:

	Reductionsfactoren bei dem Ringdurchmesser: 360 mm	400 mm	500 mm
magnetisches Strommass:	$\frac{54.7}{n}$	$\frac{60.8}{n}$	$\frac{76.0}{n}$
chemisches Strommass:	$\frac{57.0}{n}$	$\frac{63.3}{n}$	$\frac{79.2}{n}$.

30. Leitet man den Strom in den aus n Windungen gebildeten Ring der Tangentenbussole, so ist die Stromstärke in magnetischem Masse:

$$0.96\,\frac{560}{21+n};$$

daher ist:

$$tg\,\alpha = \frac{560 \times 0.96}{21+n} \cdot \frac{2n\pi}{RT} = 10 \times \frac{n}{21+n}.$$

Die Ausrechnung ergiebt für:

1	2	3	4	5	10 Windungen.
24	41	51	58	63	73 Grad Ablenkung.

31. a) Das Drehungsmoment vom Kreis auf die Nadel findet man wiederum mit Hülfe der bei der Tangentenbussole eingeführten einfachen Vorstellung, dass die Einwirkung auf die Nadelpole nahezu ebensogross sei, als wenn sie sich in der Umdrehungsaxe der Nadel befänden; es ergiebt sich hierauf das Drehungsmoment

genau: $\frac{2R^2\pi im}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2R^2\pi im}{r^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{R^2}{r^2}+-\ldots\right)$,

oder angenähert: $\frac{2R^2\pi im}{r^3}$;

b) die Gleichung $\frac{2Mm}{r^3} = \frac{2R^2\pi im}{r^3}$ ergiebt:

$$M = R^2\pi \,.\, i;$$

c) umgekehrt ist: $i = \frac{M}{R^2\pi}$;

d) den Stromstärken (magnetisches Mass):

2 4 6 8 10

entsprechen die Momente des ersetzenden Magneten:

6.3×10^6 12.6×10^6 18.8×10^6 25.1×10^6 31.4×10^6;

e) der Strom muss, um den Magneten unter den gegebenen Verhältnissen zu ersetzen, die (magnetische) Stärke:

$$\frac{32}{\pi} = 10.19$$

haben.

32. Die auf den Südmagnetismus und den Nordmagnetismus wirkenden Drehungsmomente setzen sich zu folgenden resultirenden Drehungsmomenten zusammen:

a) $\frac{FiL}{\sqrt{R^2+L^2}} - \frac{FiL}{\sqrt{R^2+L^2}} = 0$, keine Drehung;

b) $-\frac{Fi\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{4}}} - \frac{Fi\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{4}}} = -\frac{FiL}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{4}}}$, Dr. v. r. n. l;

c) $+Fi - \frac{FiL}{\sqrt{R^2+L^2}} - Fi = -\frac{FiL}{\sqrt{R^2+L^2}}$, Dr. v. r. n. l;

d) $Fi - \frac{FiL}{\sqrt{R_2+L^2}} - Fi = -\frac{FiL}{\sqrt{R^2+L^2}}$, Dr. v. r. n. l.

33. a) Die Gleichgewichtsbedingungen für die Nadel sind, je nachdem der Strom durch die obere Ringhälfte von Süden nach Norden oder umgekehrt geleitet wird:

1. $$\frac{2\pi i}{R}\cos(v_1-\Delta)=T\sin v_1;$$

2. $$\frac{2\pi i}{R}\cos(v_2+\Delta)=T\sin v_2.$$

Löst man die Cosinus auf den linken Seiten der Gleichungen auf, so erhält man,

indem 1. $\times \sin v_2 + 2. \times \sin v_1$ genommen wird:

3. $$i\cos\Delta=\frac{RT\sin v_1\sin v_2}{\pi\sin(v_1+v_2)};$$

indem 1. $\times \cos v_2 - 2. \times \cos v_1$ genommen wird:

4. $$i\sin\Delta=\frac{RT\sin(v_1-v_2)}{2\pi\sin(v_1+v_2}\;;$$

Quadrirung von 3. und 4. und Addition ergiebt endlich:

5. $$i=\frac{RT}{2\pi\sin(v_1+v_2)}\sqrt{\sin^2 v_1+\sin^2 v_2-2\sin v_1\sin v_2\cos(v_1+v_2)}.$$

Durch Einführung von $\frac{1}{2}(v_1+v_2)$ und $\frac{1}{2}(v_1-v_2)$ statt v_1 und v_2, kann man 5. in die Form überführen:

6.
$$i=\frac{RT}{2\pi}\sqrt{tg^2\tfrac{1}{2}(v_1+v_2)+\sin^2\tfrac{1}{2}(v_1-v_2)\left[\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}(v_1+v_2)}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(v_1+v_2)}\right]}.$$

b) Ist nun $\frac{1}{2}(v_1-v_2)$ sehr klein, so kann man den Näherungsausdruck setzen:

7. $$i=\frac{RT}{2\pi}tg\tfrac{1}{2}(v_1+v_2).$$

Electromagnetismus.

34. A. Das Maximalmoment ist beim Durchmesser d:

$$M=9\,\text{?}\times 58600\,d^2,$$

und beträgt daher in Ganzen der Einheit 10^5 ausgedrückt beim

Durchmesser:	10 mm	20 mm	30 mm	40 mm
Moment:	5274	21096	47466	84384.

B. Das durchschnittliche Maximalmoment pro Milligramm Eisen beträgt bei jedem Durchmesser:

2609.

C. Vertauschung von Tangente und Bogen in dem Müller'schen Ausdrucke ergiebt schliesslich:

$$M = 7900\, P\sqrt{d}.$$

D. In den Fällen der Aufgabe ist M so gross, dass

$$\frac{M}{58600\, d^2} \text{ entweder } 45 \text{ Grad oder } 60 \text{ Grad}$$

zu setzen ist; die mit Berücksichtigung dessen erhaltenen Werthe von P sind mit der Windungszahl 380 zu dividiren, um die Stromstärke zu erhalten. Man findet auf diese Weise, um Electromagneten von nachgenannten Durchmessern herzustellen, bedarf es resp. der Stromstärken in Jacobi'schen Einheiten:

Durchmesser:	10 mm	20 mm	30 mm	40 mm
Stromstärke für $\frac{1}{2}$ Max.-M.:	35	100	184	283
Stromstärke für $\frac{2}{3}$ Max.-M.:	61	173	318	490.

35. A. Das Maximum des Stabmagnetismus, welches bei der magnetisirenden Kraft $X = \infty$ eintritt, ist 1808 absolute Einheiten pro Milligramm Eisen.

B. Die Grösse der magnetisirenden Kraft X ergiebt sich durch Auflösung der Gleichung

$$904 = 1808\left[1 - \tfrac{1}{3}\,\frac{(803.8)^2}{X^2}\right],$$

und liefert den Werth:

$$X = 656.3.$$

36. Wird beispielsweise angenommen, der Electromagnet von:

20 mm Durchmesser und 330 mm Länge

bewirke auf eine Nadel aus der Entfernung e in der ersten Hauptlage das Drehungsmoment μ, so wird dasselbe Drehungsmoment von den beiden anderen Stäben resp. in den Entfernungen

$$\tfrac{1}{2}\,e \text{ und } \tfrac{1}{3}\,e$$

bewirkt; demnach sind bei diesen die aus der gleichen Entfernung e bewirkten Momente:

$$\frac{\mu}{8} \text{ und } \frac{\mu}{27},$$

und daher die durch den magnetisirenden Strom 100 hervorgebrachten Momente der beiden Magnetstäbe

von 10 mm Durchmesser, 165 mm Länge $= 131 \times 10^6$;
von $6\frac{2}{3}$ mm Durchmesser, 110 mm Länge $= 39 \times 10^6$.

37. Folgenden Entfernungen der Querschnitte von der Stabmitte entsprechen die daruntergesetzten Mengen freien Magnetismus:

	0	100	125	150	162.4
freier Magnetismus:	0	1.4	49.1	1695.1	9820.4.

Gegenseitige Einwirkung von Stromleitern.

38 (71). Man erkennt leicht, dass die Wirkung jedes Elementes vom Kreisringe auf jedes Element des Leiters l wegen der Werthe der Winkel der Null gleich sein muss, folglich auch keine Wirkung der ganzen Leiter aufeinander vorhanden sein kann.

39. Bei gleicher Richtung des Stromes in beiden Elementen ist die Wirkung beider aufeinander:

$+\frac{1}{2}$ absolute Einheit (Abstossung);

bei entgegengesetzter Richtung des Stromes in beiden Elementen ist die Wirkung beider aufeinander:

$-\frac{1}{2}$ absolute Einheit (Anziehung).

40. Fliessen beide Ströme nach dem Ursprung hin oder von ihm weg, so ist die Wirkung:

$-\frac{3}{4}$ absolute Einheiten (Anziehung);

fliesst ein Strom vom Ursprung hinweg, der andere nach ihm hin, so ist die Wirkung:

$+\frac{3}{4}$ absolute Einheiten (Abstossung).

41. Bei gleicher Richtung des Stromes ist die Wirkung:

-1 absolute Einheit (Anziehung);

bei entgegengesetzter Richtung des Stromes ist die Wirkung:

$+1$ absolute Einheit (Abstossung).

Wanderung der Electricität und Wärme durch den Schliessungskreis.

42. Die Menge der pro $\frac{1}{10^9}$ Sekunde durch den Querschnitt des Schliessungskreises bewegten positiven und der ihr entgegenbewegten negativen Electricität ist in den drei Beispielen der Aufgabe resp.:

2983 1492 746 absolute Einheiten.

43. A. Nach Feststellung des Zinkverbrauches pro 1000 Minuten in Grammen, erhält man durch Multiplication mit 0,769 sofort

die gesuchten Zahlen; die Wärmeentwickelung im Schliessungskreise beträgt in der angenommenen Einheit (Kilogramm, Grad C.):

29.88 14.94 7.47 Wärmeeinheiten.

B. Die Stromarbeit (absolute Krafteinheit, mm) beträgt (nach dem Joule'schen Gesetze), wenn J die Stromstärke und R den Widerstand (beides electromagnetisch gemessen) bedeutet:

$$J^2 . R$$

pro Sekunde. Ist nun nach Einführung des electromagnetischen Masses, statt der ursprünglich durch die Aufgabe gegebenen Masse $J^2 R$ berechnet worden, so ist, um die entwickelte Wärmemenge zu erhalten, noch mit dem Aequivalent der Wärmeeinheit (Kilogramm, Grad C.) zu dividiren, wofür man (bezogen auf absolute Krafteinheiten und mm)

$$4159.4 \times 10^{12}$$

erhält. Die Ausführung der Rechnung ergiebt für die drei Beispiele der Aufgabe resp.:

31.03 15.51 7.76 Wärmeeinheiten (kg, ^{0}C.).

Führt man die Rechnung mit dem wahrscheinlich richtigsten Werthe $= 430$ Kilogrammeter für das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit (Wüllner's Experimentalphysik, 3. Ausgabe, Bd. 3., S. 471) durch, so erhält man statt der eben genannten Zahlen die folgenden:

30.60 15.30 7.65 Wärmeeinheiten (kg, ^{0}C.).